



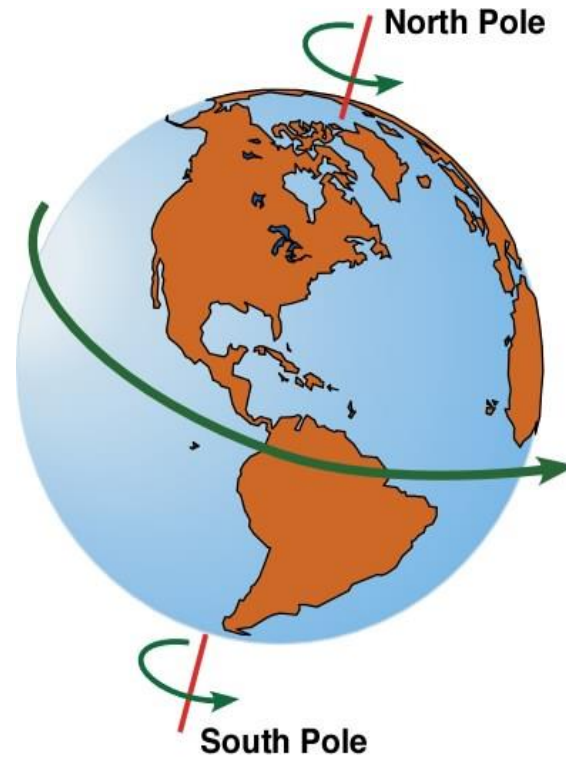
第五章

刚体的转动



- 刚体转动的描述
- 刚体定轴转动定律
- 转动惯量的计算
- 定轴转动定律应用
- 角动量守恒
- 转动中的功和能

§ 5.1 刚体转动的描述



1. 刚体

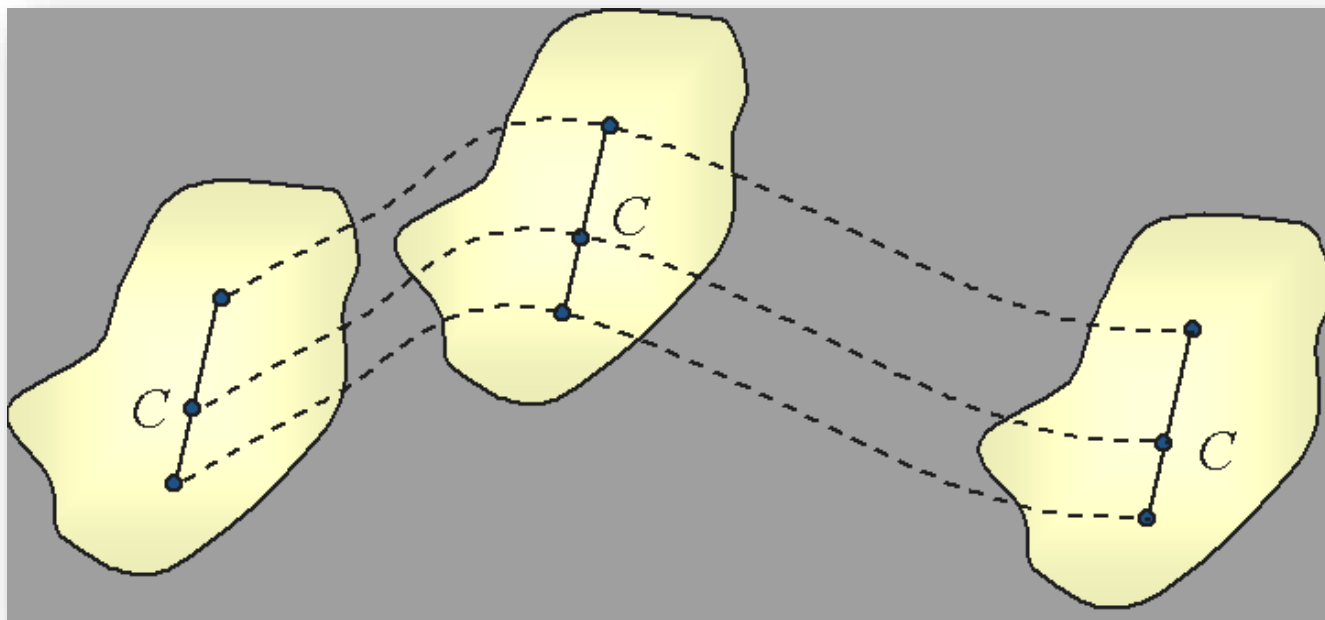
定义：受力时不改变形状和体积的物体。

组成：包含大量质点的质点系。

特点：各质点之间相对位置保持不变。

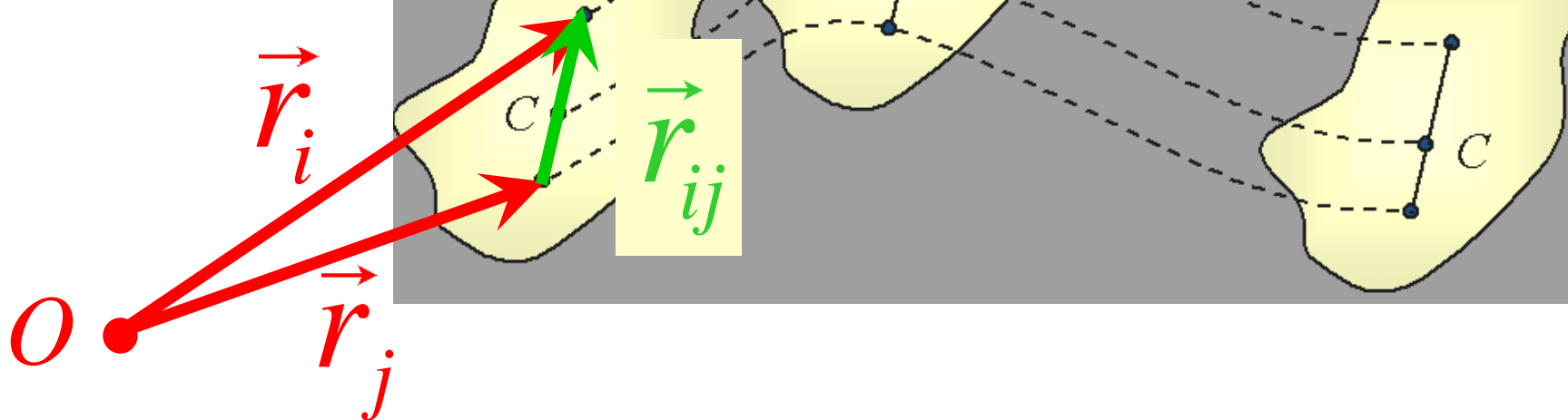
2. 刚体的平动

特点：连接任意两质点的线段总是平行。



2. 刚体的平动

以 O 为参考点:

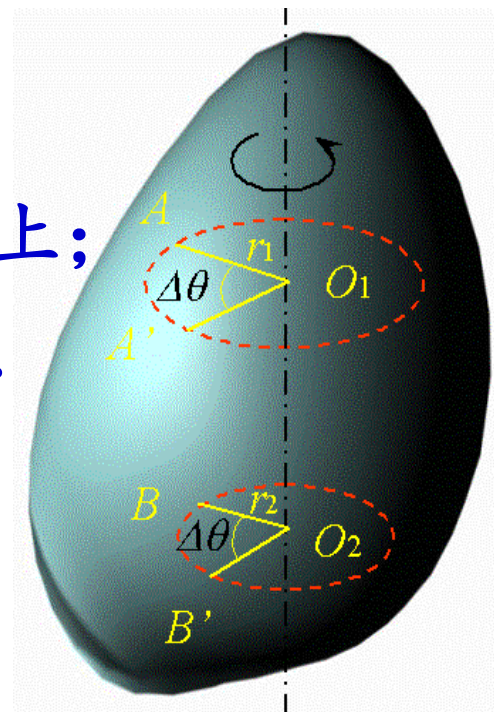


$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_{ij} = \vec{c} \\ \vec{r}_i = \vec{r}_j + \vec{r}_{ij} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_j = \vec{v}_i \Rightarrow \vec{a}_j = \vec{a}_i$$

结论: 刚体平动时, 各质点具有相同的轨迹、速度和加速度, 因此可以用质心的运动来代替整个刚体的平动。

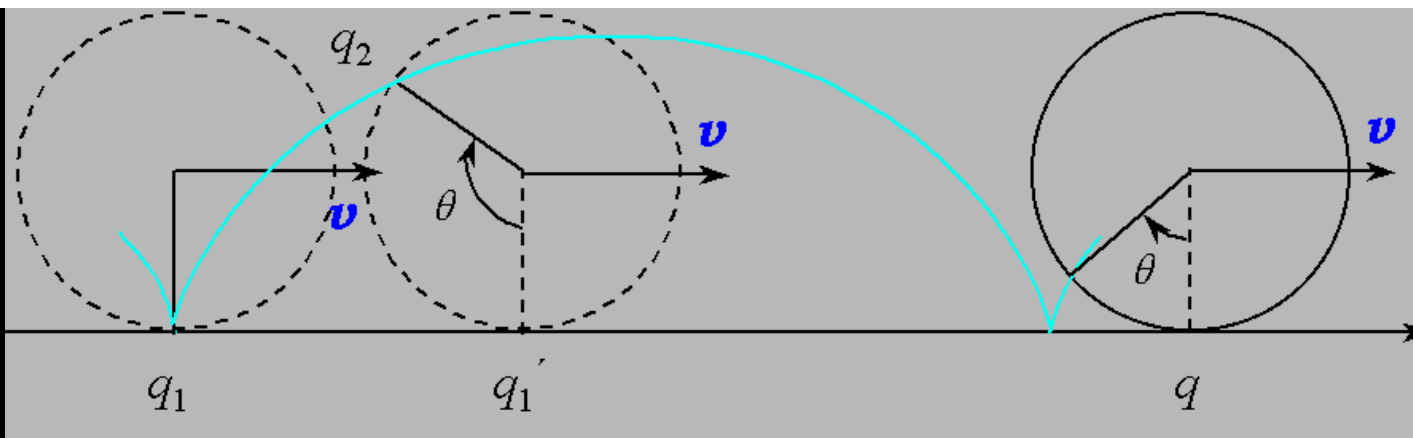
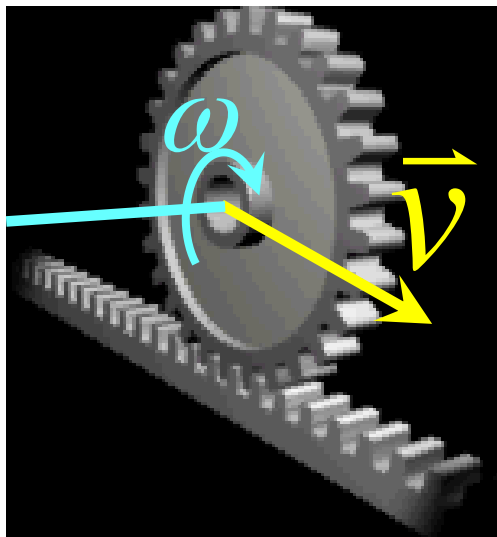
3. 刚体的定轴转动

- 所有质点做圆周运动，圆心在固定转轴上；
- 所有质元具有相同的角速度和角加速度。



4. 刚体的一般运动

一般运动 = 平动 + 定轴转动

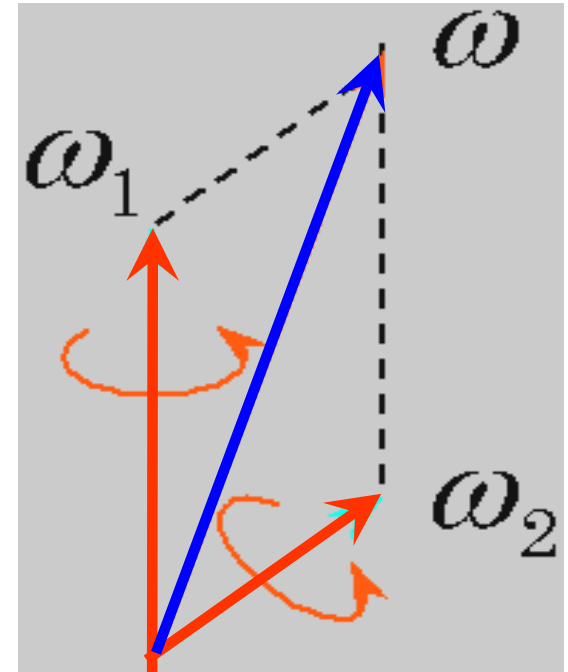
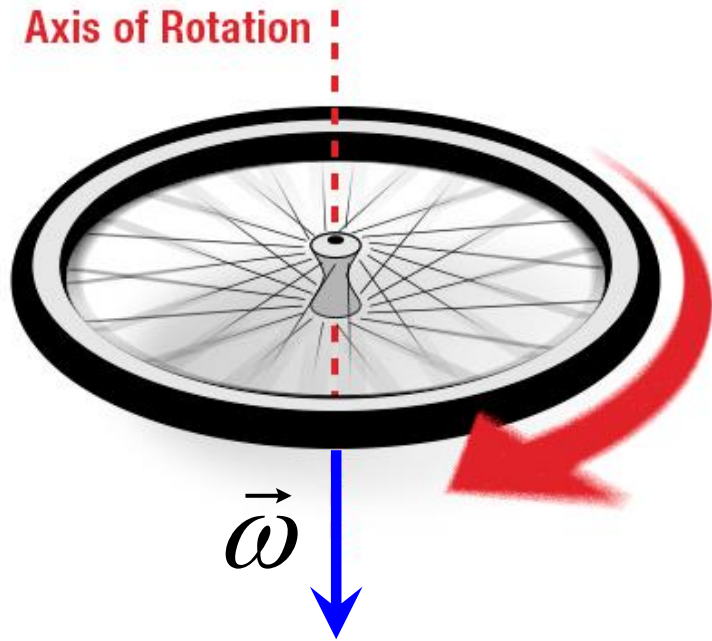


5. 转动的描述

➤ 角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

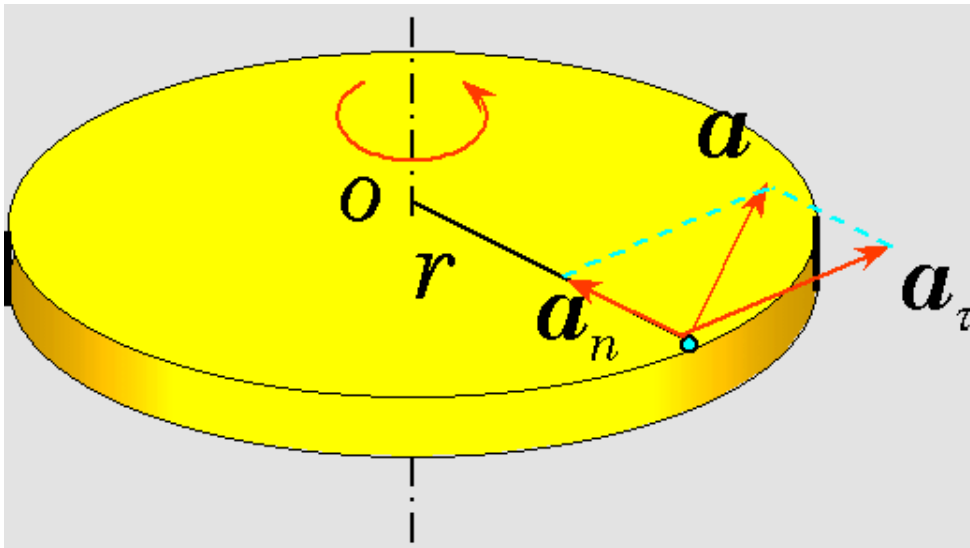
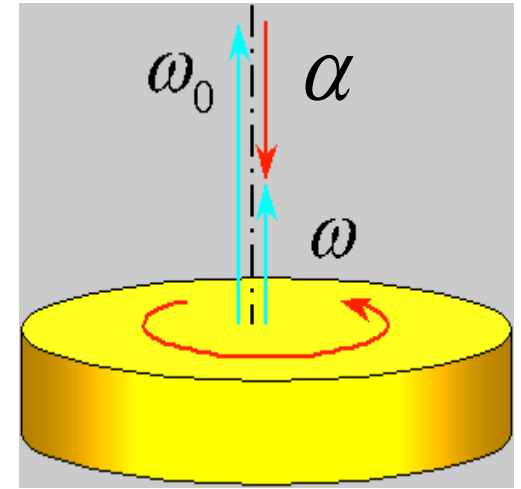
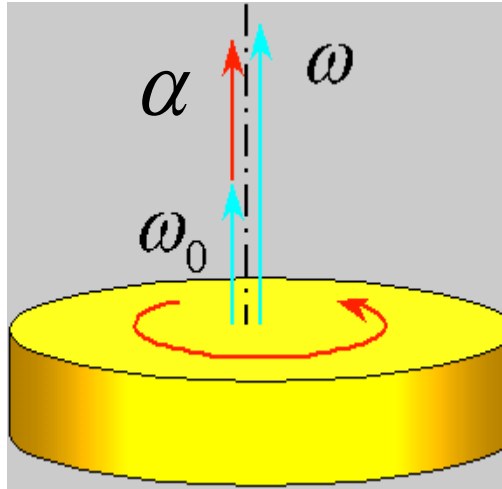
$$v = \omega r$$



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

➤ 角加速度

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = r\omega^2$$

6. 平动与转动的对比

平动—匀加速线性运动

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x^2 - v_{x0}^2 = 2a_x(x - x_0)$$

转动—匀角加速度转动

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

§ 5.2

刚体定轴转动定律



Review

定点转动:

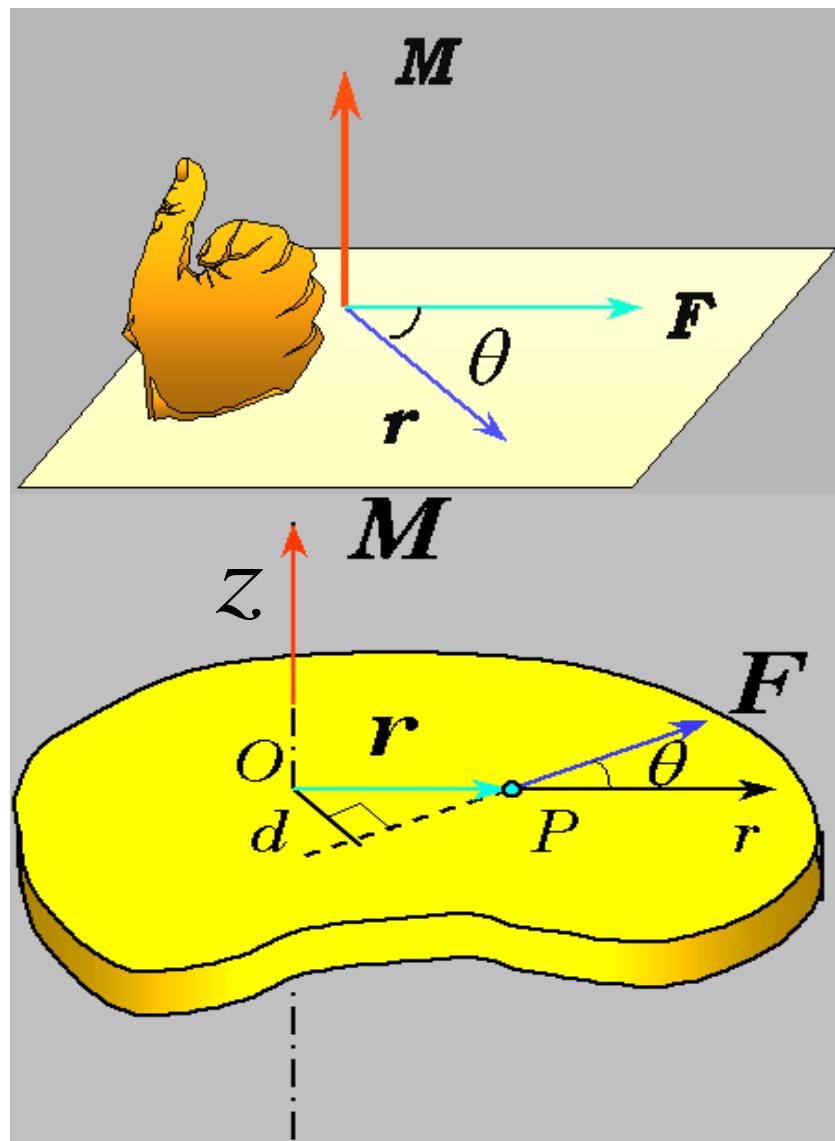
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

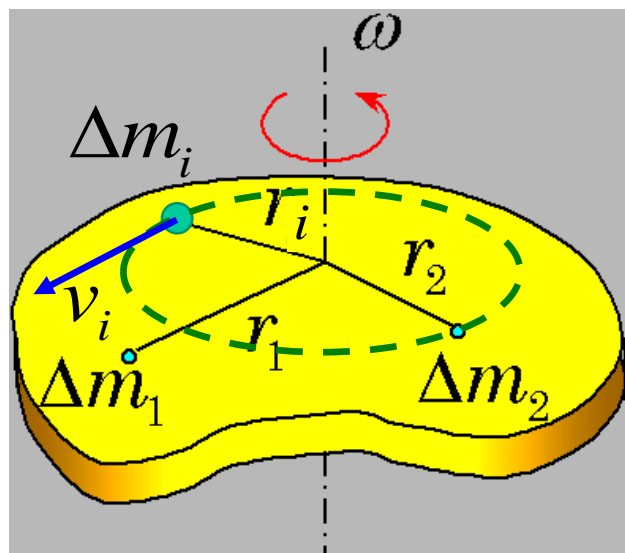
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

定轴转动:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$



1. 刚体对定轴的角动量



质元 Δm_i 的角动量为：

$$L_{iz} = \Delta m_i r_i v_i \sin 90^\circ = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum L_{iz} = \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$L_z = J_z \omega$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

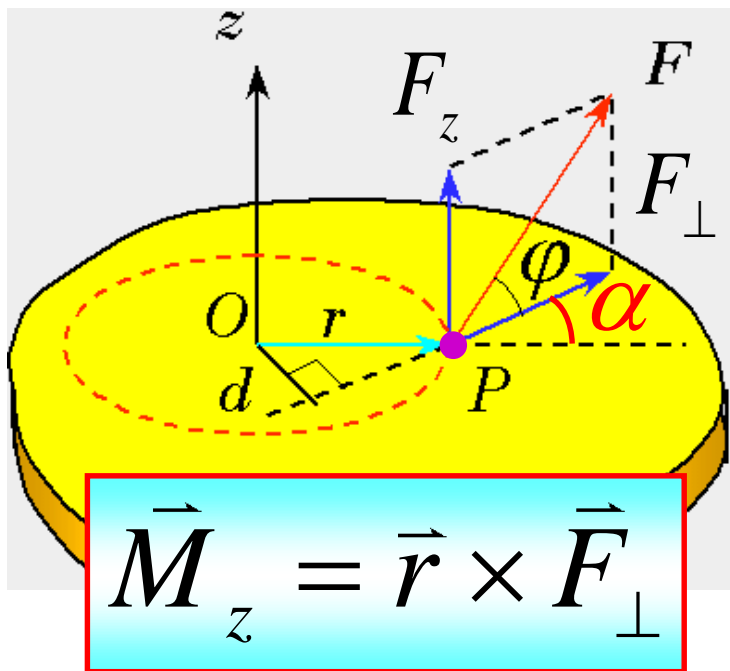
➤ **物理意义：**描述刚体定轴转动的运动状态，等于对定轴的转动惯量与角速度的乘积；

2. 刚体对定轴的转动惯量

$$J_z = \sum \Delta m_i r_i^2$$

- 取决于质量相对于转轴的分布；
- 与刚体的运动和受力无关；
- 刚体转动中惯性大小的量度。

3. 对定轴的力矩



$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\perp$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}_z + \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

$\perp z$ axis

$// z$ axis

4. 对定轴的角动量定理

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

➤ 刚体对定轴角动量的时间变化率等于对该定轴的合外力矩。

5. 刚体定轴转动定律

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$L_z = J_z \omega$$

$$\Rightarrow M_z = \frac{d(J_z \omega)}{dt} = J_z \alpha$$

$$M = J \alpha$$

$$J_z = \sum \Delta m_i r_i^2$$

➤ 作用在刚体上的对定轴的合外力矩与角加速度成正比，比例常数为刚体对同一轴的转动惯量。

➤ 可视为转动问题中的牛顿第二定律；

➤ 转动惯量是转动中表现出的惯性。

$$M = J_1 \alpha_1$$

$$M = J_2 \alpha_2$$

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$



§ 5.3

转动惯量的计算

质量分布均匀的大理石圆盘和木质圆盘半径相同，均绕质心轴转动，哪个转动惯量较大？

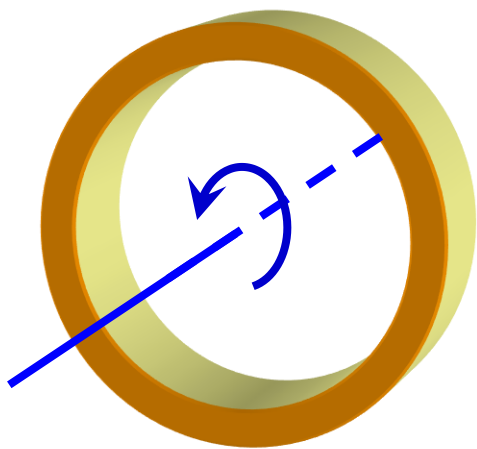


A. 大理石圆盘

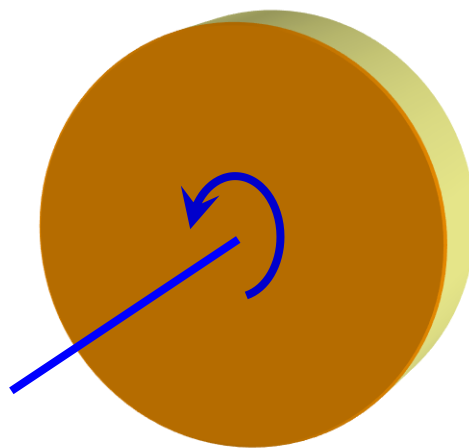


B. 木质圆盘

圆环和圆盘具有相同的质量和半径，均绕质心轴转动，哪个转动惯量较大？

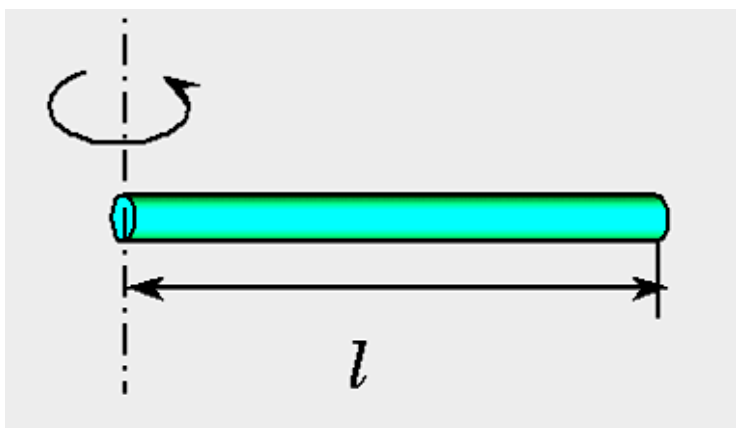


A. 圆环

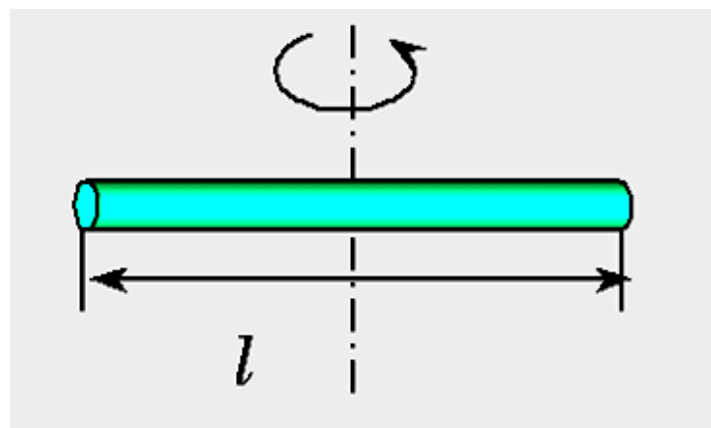


B. 圆盘

相同质量分布的细棒，绕不同的轴转动，哪种情况的转动惯量更大一些？



A



B

➤ 影响转动惯量的因素

1. 形状和大小均相同的刚体，质量越大，转动惯量越大；
2. 质量相同的刚体，质量分布离轴越远，转动惯量越大；
3. 同一刚体绕不同转轴的转动惯量不同。

——质量对转轴的分布

➤ 转动惯量的计算

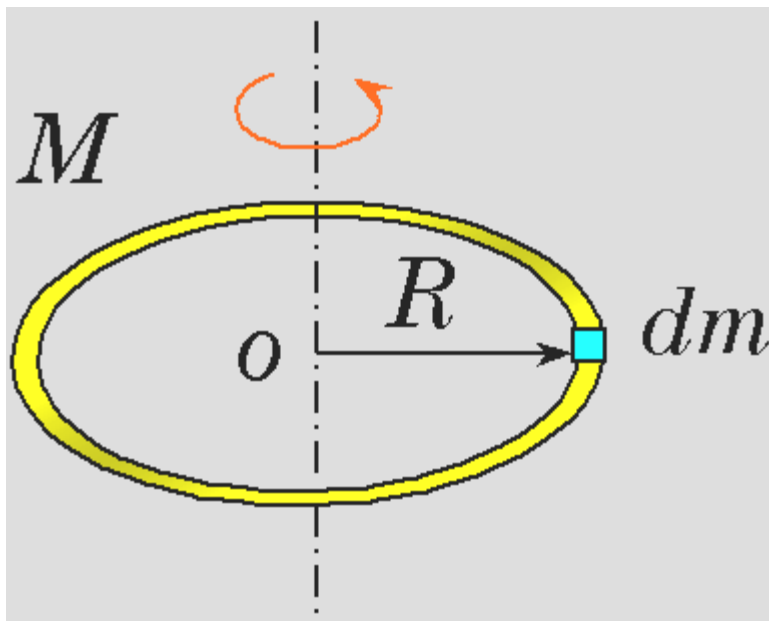
$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

质点系的转动惯量

$$J = \int r^2 dm$$

连续质量的刚体

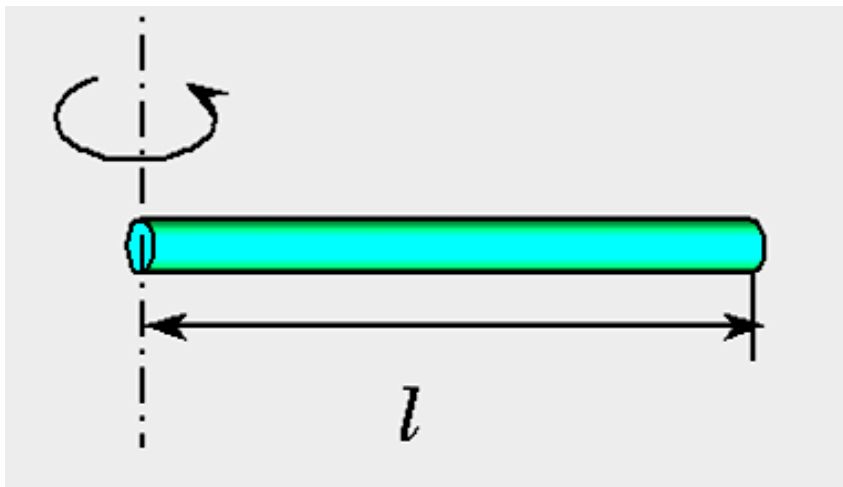
例1：质量均匀的圆环绕通过圆心的垂直转轴的转动惯量.



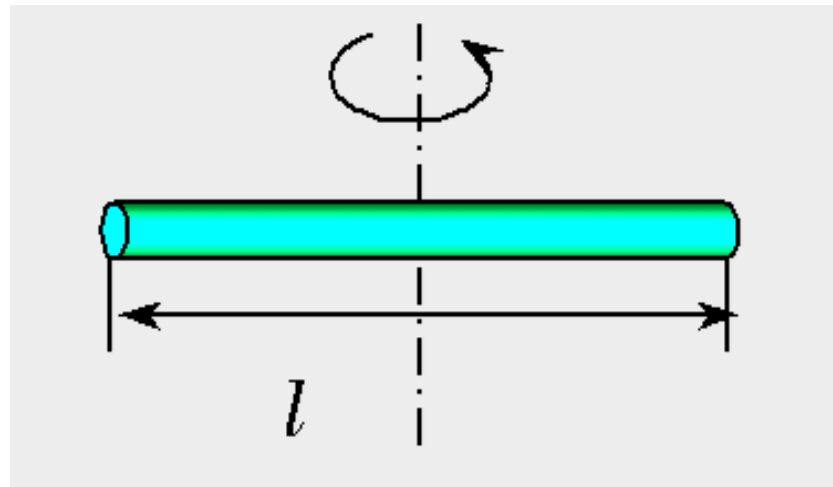
$$J = MR^2$$

$$J = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

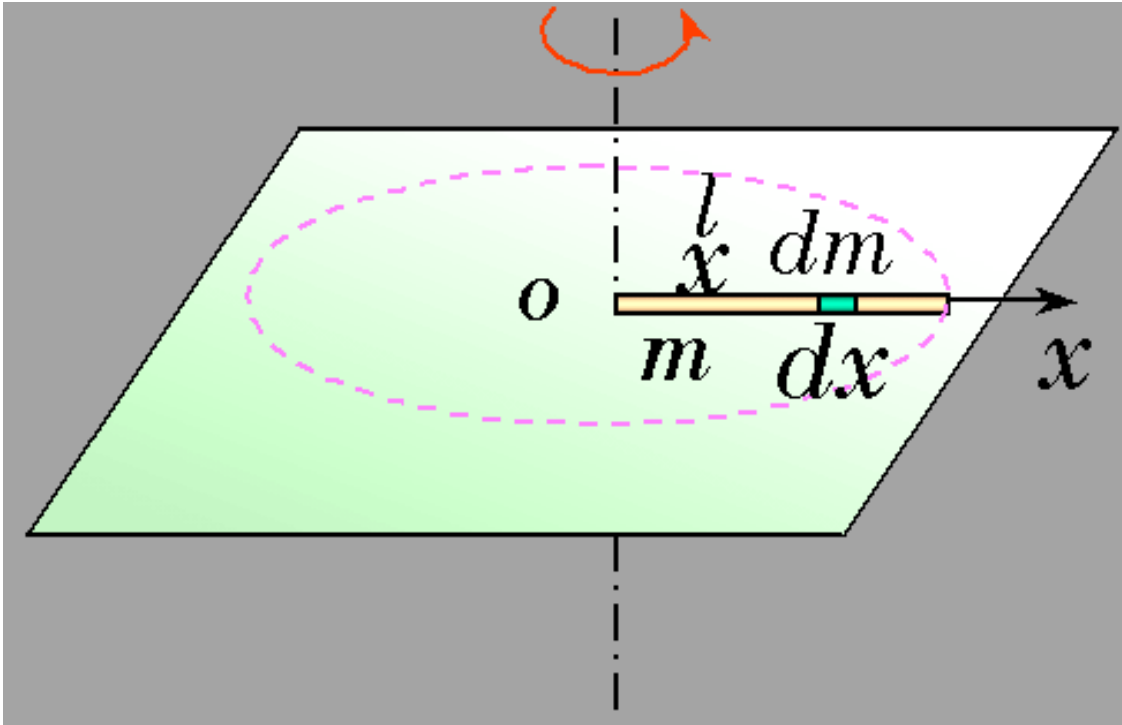
例2：质量均匀的细棒绕与其垂直的转轴转动的转动惯量.



转轴与棒垂直，
通过细棒端点



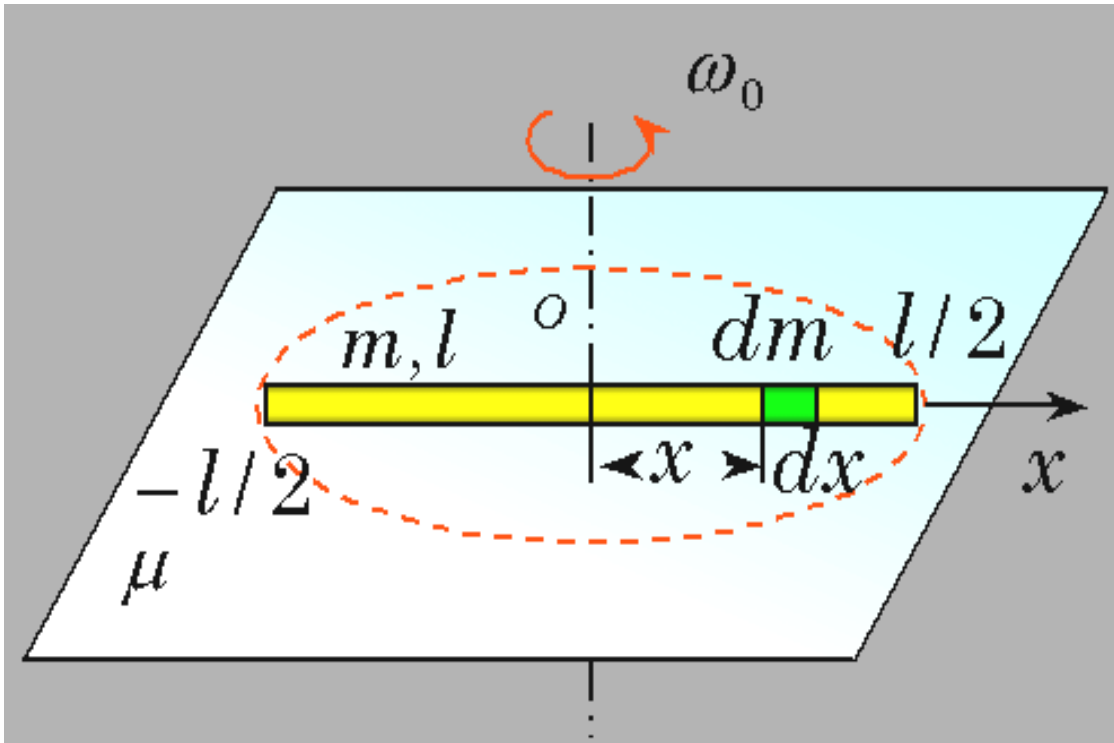
转轴与棒垂直，
通过细棒中点



$$J = \int r^2 dm$$

$$J = \frac{1}{3} ml^2$$

$$J = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx$$



$$J = \int r^2 dm$$

$$J = \frac{1}{12} ml^2$$

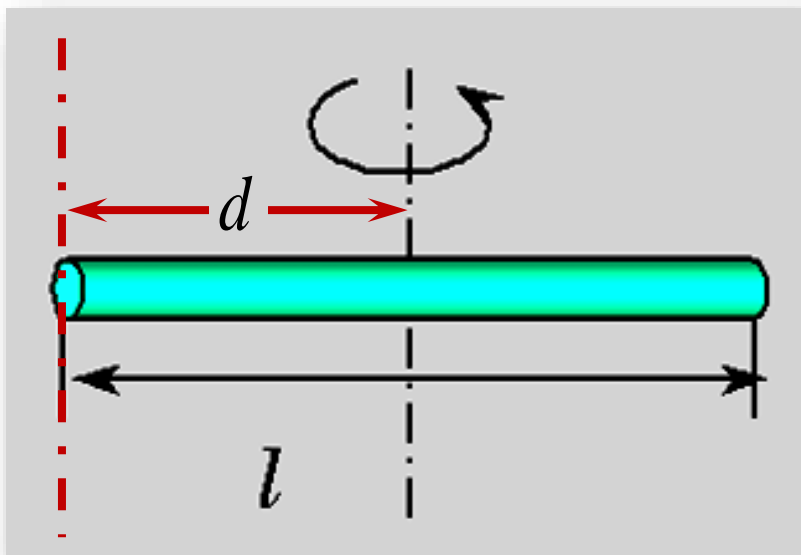
$$J = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx$$

➤ 平行轴定理

$$J = J_C + md^2$$

J_C : 刚体对质心轴的转动惯量;

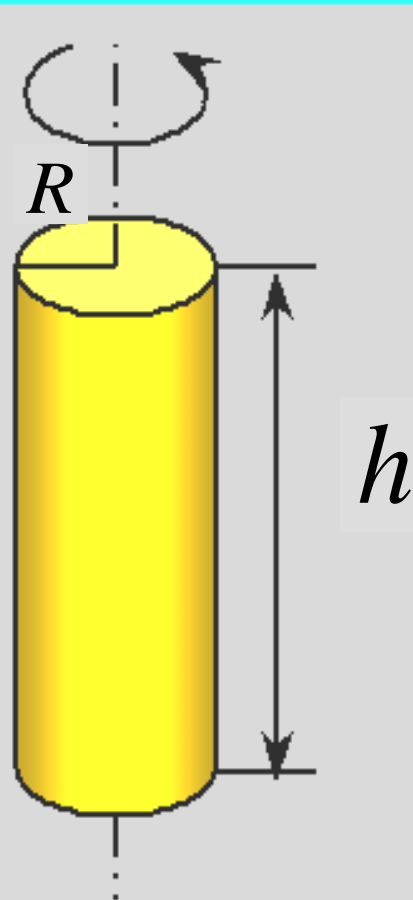
J : 刚体对与质心轴平行且距离为 d 的轴的转动惯量.



$$J_C = \frac{1}{12} ml^2$$

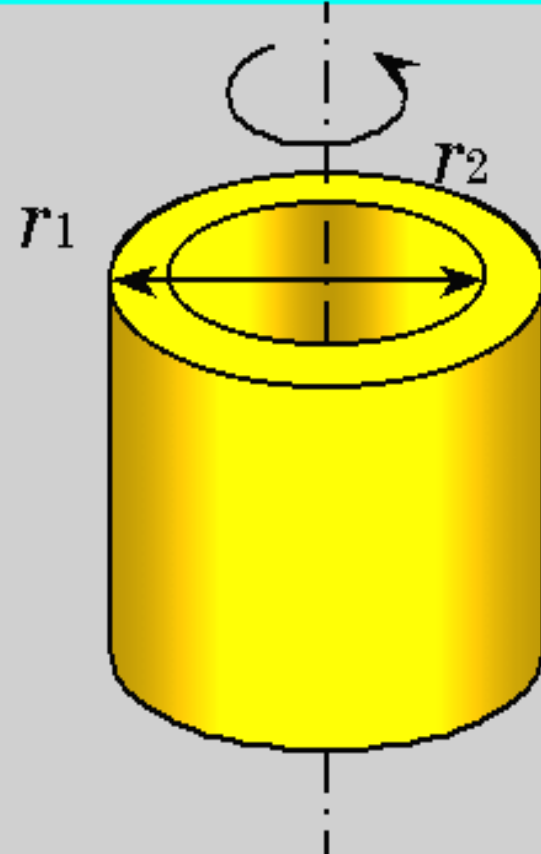
$$d = \frac{l}{2}$$

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$



圆柱体转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$



圆筒转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$