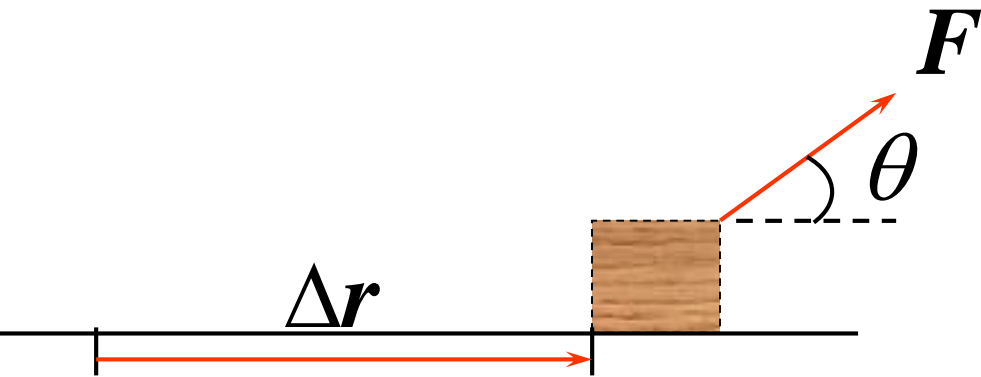


§ 3.4 功和动能定理



1. 恒力做功



$$A = F|\Delta \vec{r}|\cos \theta$$
$$= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

► 功是标量，无方向，有正负。

$0 \leq \theta < 90^\circ$	做正功
$\theta = 90^\circ$	不做功
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$	做负功

单位： $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m}$ $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$

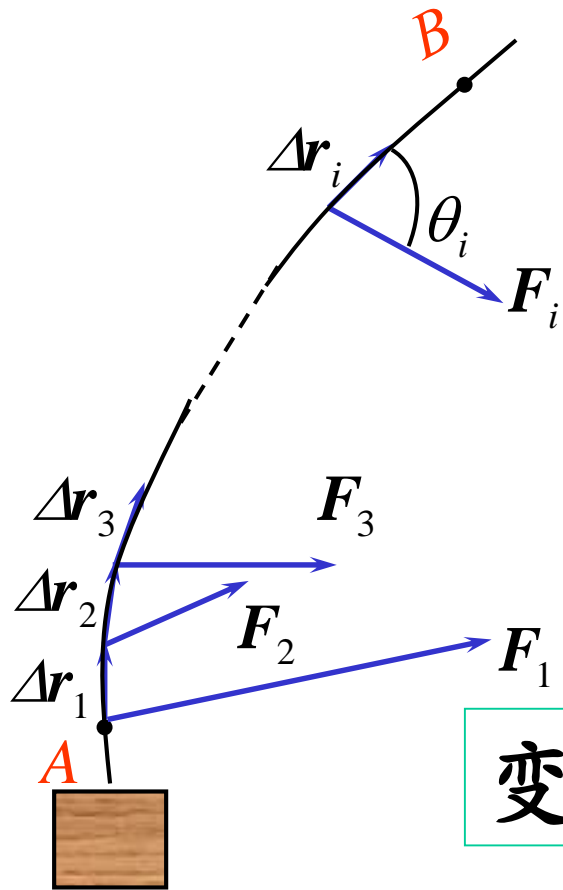
2. 变力做功

$$A = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta \vec{r}_3 + \cdots + \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i + \cdots$$

元功: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

总功:

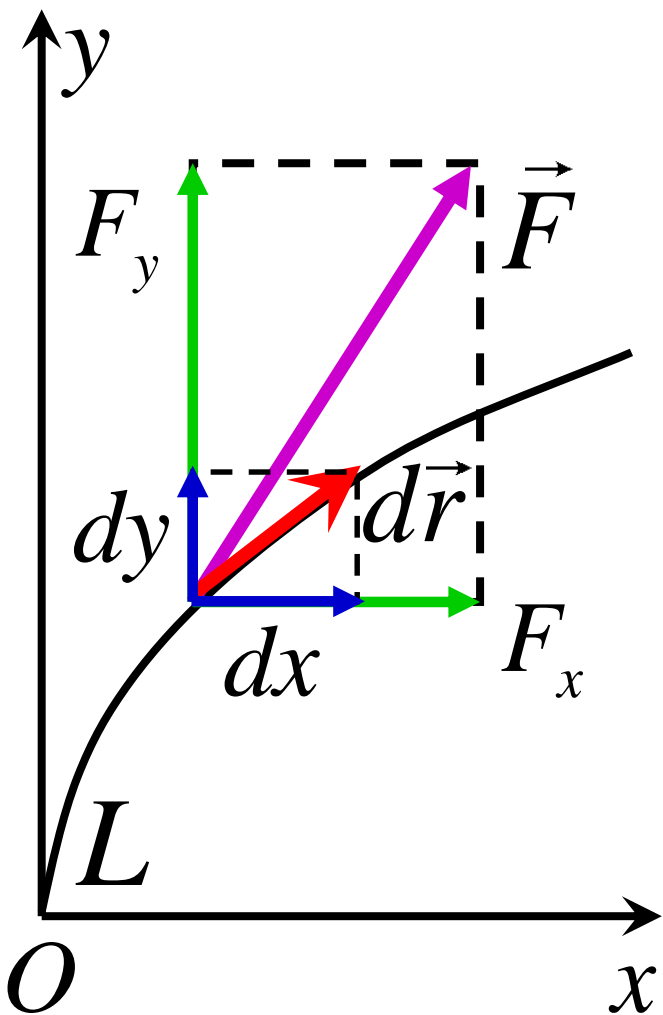
$$A_{AB} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



变力所做的总功等于元功的和。

3. 功的计算

(1) 直角坐标系:



$$A_L = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_L (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j})$$

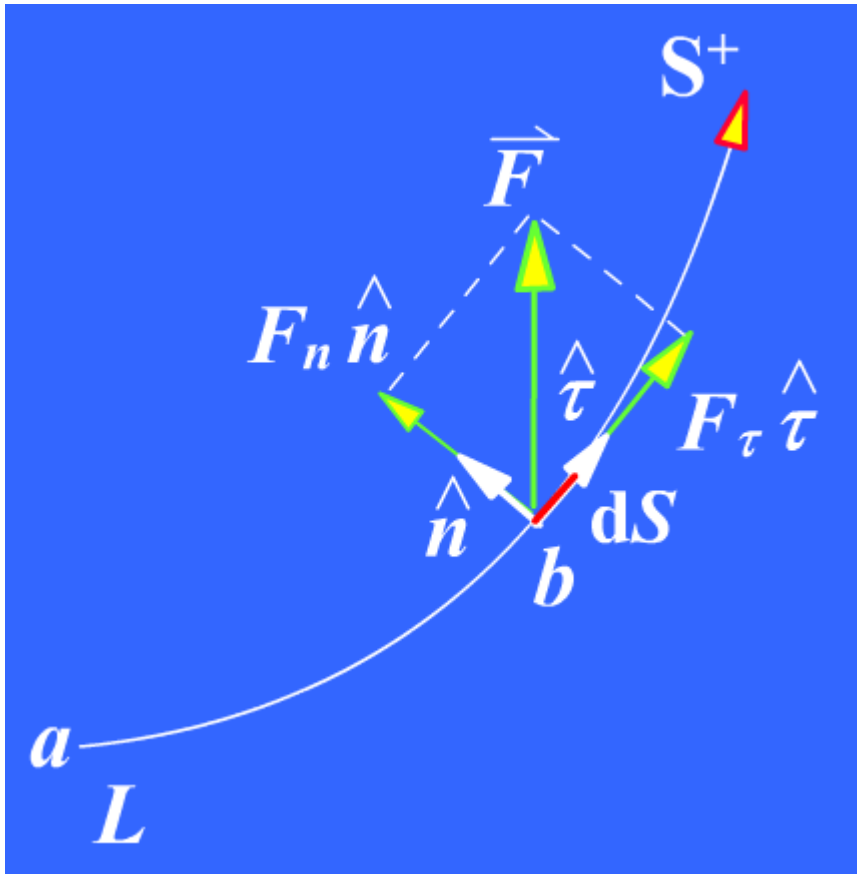
$$= \int_L (F_x dx + F_y dy)$$

三维坐标:

$$A_L = \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

3. 功的计算

(2) 平面自然坐标系:



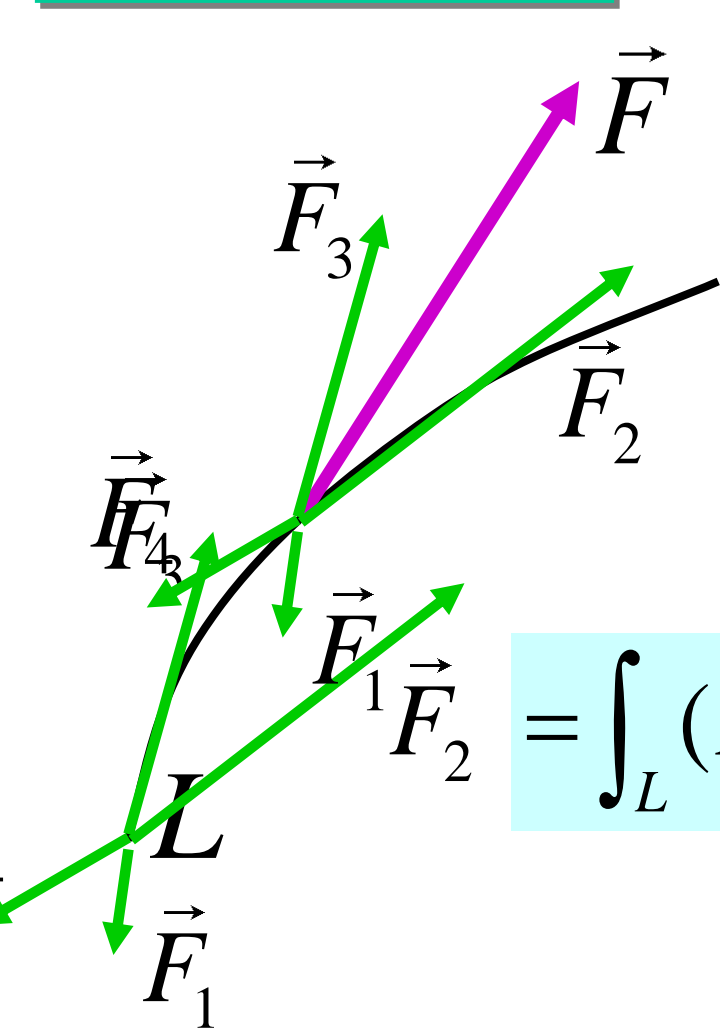
$$A_L = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_L (F_\tau \hat{\tau} + F_n \hat{n}) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_L (F_\tau \hat{\tau}_\tau + F_n \hat{n}) \cdot dS \hat{\tau}$$

$$= \int_L F_\tau dS$$

4. 合力做功



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$A_L = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_L (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_L (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_4 \cdot d\vec{r})$$

$$A_L = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

合力的功等于其各分力的功的代数和。

5. 功率

—实际问题中做功的快慢是一个重要因素.

➤ 平均功率: $\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$

单位: W (瓦特)

➤ 瞬时功率: $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \theta$$

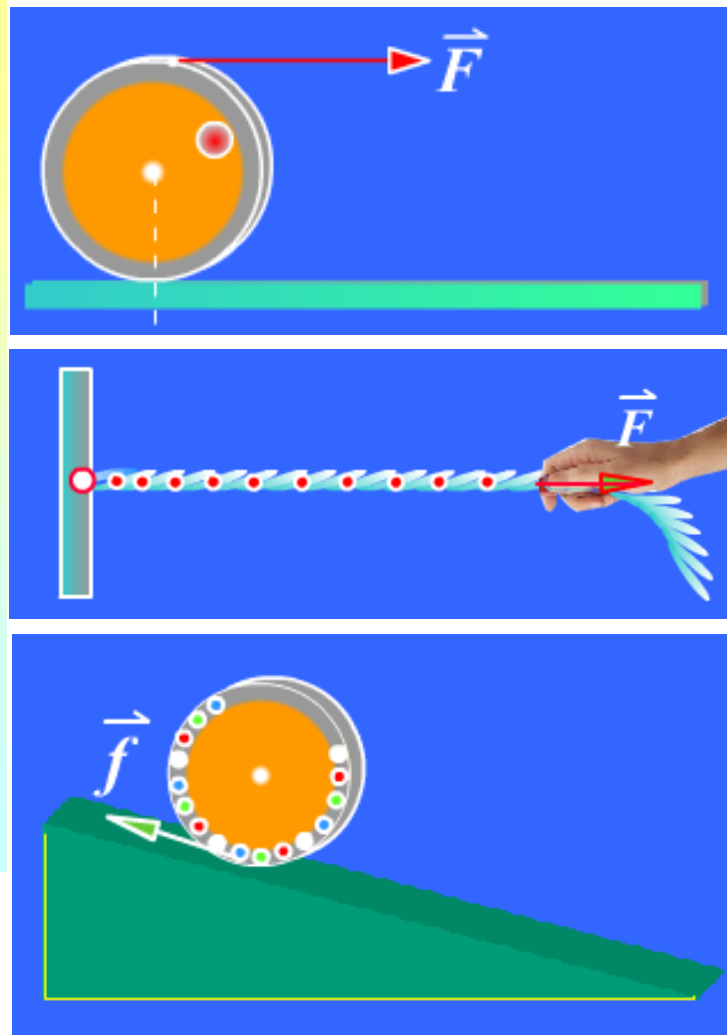
$$v \uparrow F \downarrow; v \downarrow F \uparrow$$

变速箱: 低速时用低传动比可获得更大的驱动力;
高速时用高传动比可降低牵引力获得更高速速度.

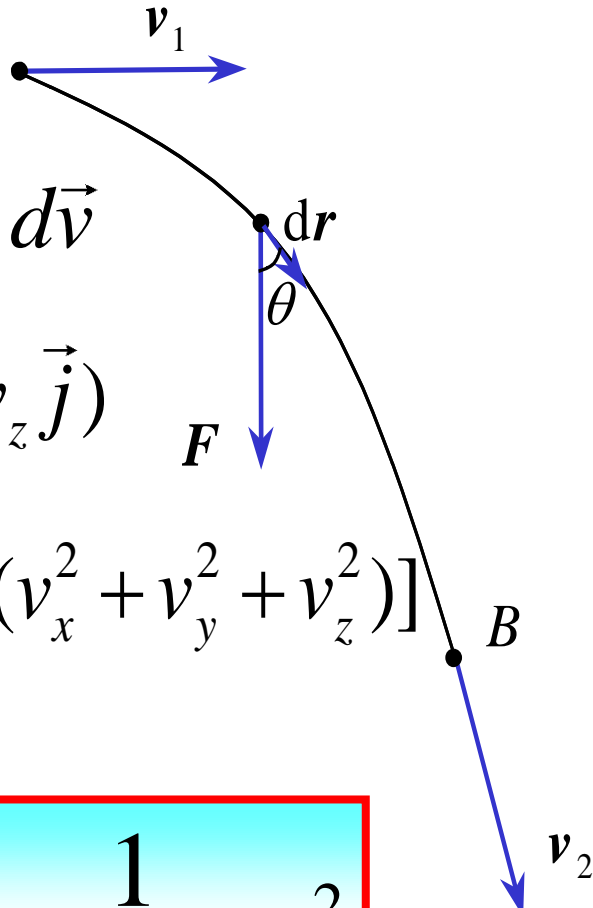


Note

- 功是标量，可以为正、负值或零，反映被做功物体能量的变化；
- 功是过程量，数值与做功的路径有关，是力对空间的积累。
- 当物体不能视为质点时，受力质点的位移与物体的位移不一致；
- 受力点的变换不能视为质点有位移；



6. 质点的动能定理

$$\begin{aligned} A_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_A^B m \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ &= \int_A^B m (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) (dv_x \vec{i} + dv_y \vec{j} + dv_z \vec{k}) \\ &= \int_A^B m (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = \int_A^B d\left[\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] \\ &= \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \end{aligned}$$


$$A_{AB} = E_{kB} - E_{kA}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

➤ **质点的动能定理：**在一段位移中，合外力对质点做的功等于质点动能的增量。

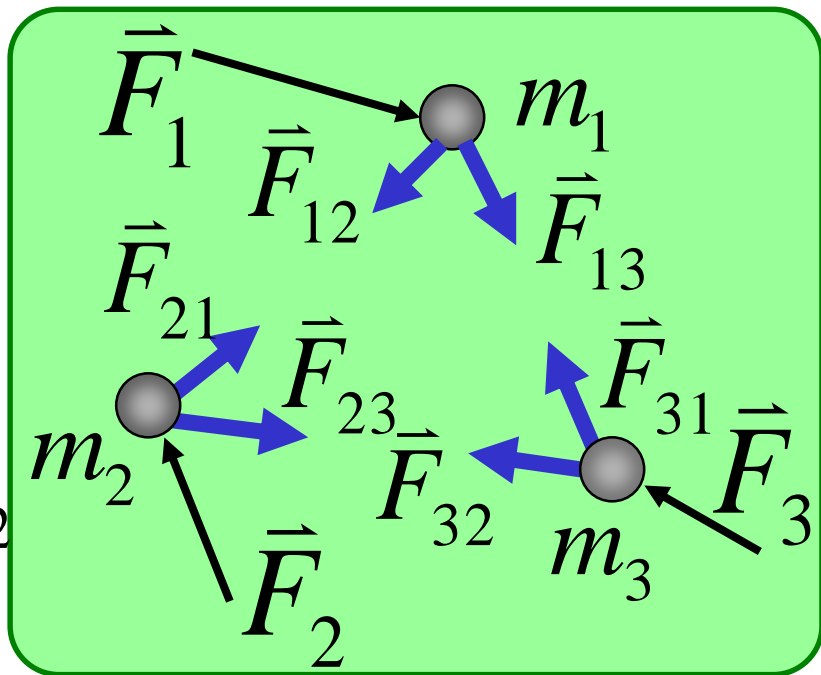
7. 质点系的动能定理

三质点系统:

对质点1: $A_{1,ex} + A_{1,in} = \Delta E_{k1}$

对质点2: $A_{2,ex} + A_{2,in} = \Delta E_{k2}$

对质点3: $A_{3,ex} + A_{3,in} = \Delta E_{k3}$



$$(A_{1,ex} + A_{2,ex} + A_{3,ex}) + (A_{1,in} + A_{2,in} + A_{3,in}) = \Delta E_{k1} + \Delta E_{k2} + \Delta E_{k3}$$

$$A_{ex} + A_{in} = \Delta E_k$$

➤ **质点系的动能定理:** 质点系的合外力与内力所做的总功等于质点系总动能的增量.

8. 一对相互作用力的功

- 一对相互作用力的功只决定于两质点间的相对位移，与参考系无关.



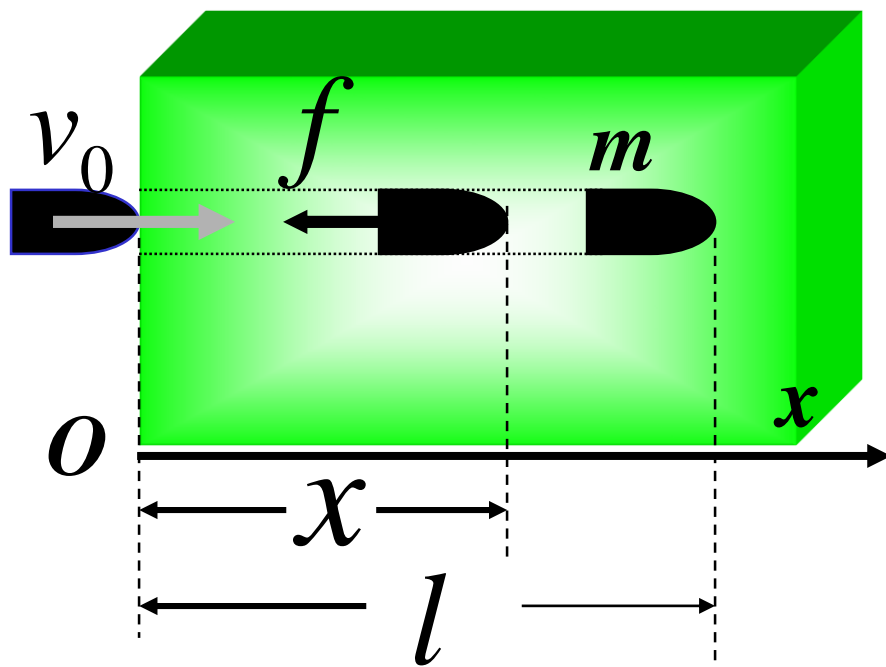
5-02—对作用力反作

Note

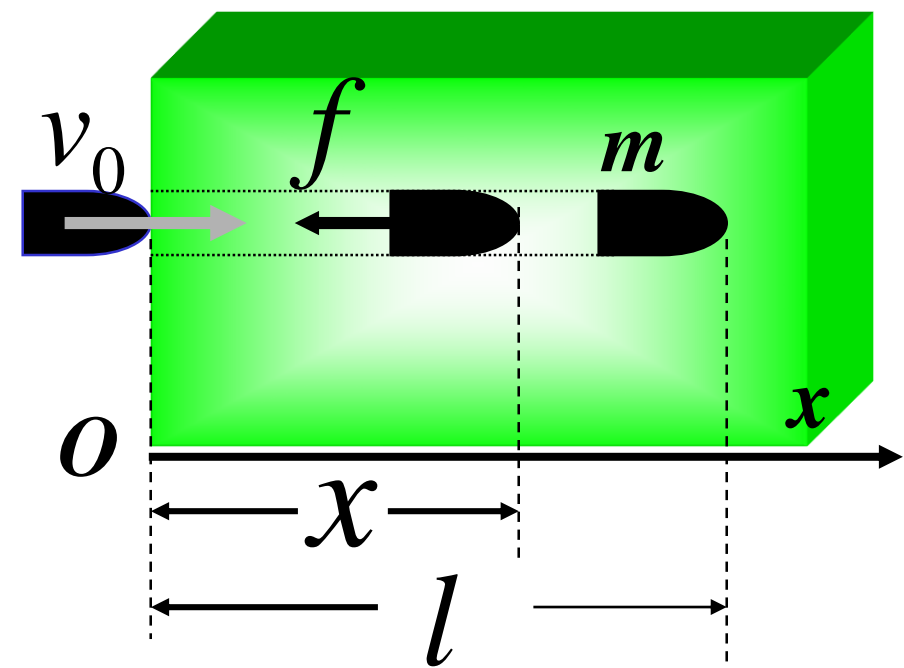
$$A_{ex} + A_{in} = \Delta E_k$$

- 质点系的内力不能改变系统的动量，但是可以改变系统的动能；
- 动能定理表明功是能量变化的量度，说明了功的真正内涵；
- 动能定理适应应用于惯性系中任何机械过程.

例：一个质量 $m=15\text{ g}$ 的子弹，以 200 m/s 的速度射入一固定的木板内，如阻力与射入木板的深度成正比，即 $f = -\beta x$ ($\beta = 5.0 \times 10^3\text{ N/cm}$).
求：子弹射入木板的深度.



解：以子弹 m 为研究对象，建立坐标系 Ox ，设子弹射入深度为 l ，初始速度为 v_0 .



由动能定理:

$$A = E_{k2} - E_{k1}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2; E_{k2} = 0$$

$$A = \int_l F_x dx = \int_0^l -\beta x dx = -\frac{1}{2}\beta l^2$$

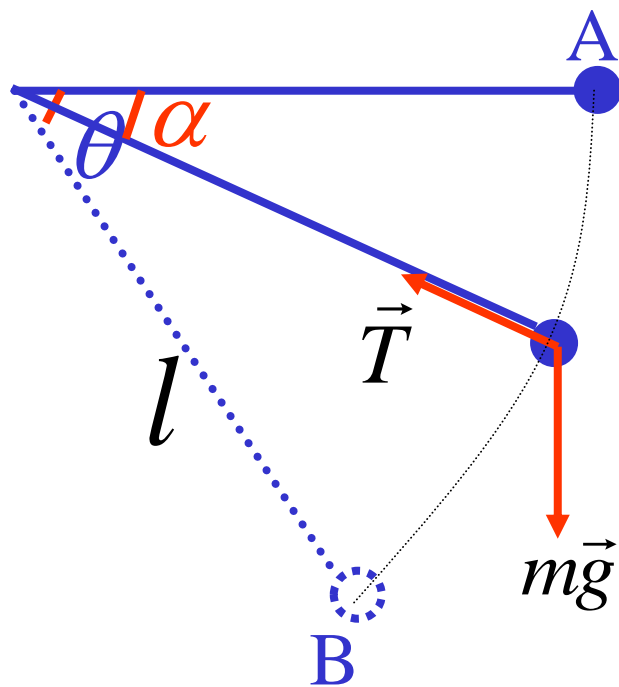
$$-\frac{1}{2}\beta l^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$l = \sqrt{\frac{mv_0^2}{\beta}} = \sqrt{\frac{15 \times 10^{-3} \times 200^2}{5.0 \times 10^5}} = 3.46 \times 10^{-2} m$$

例：一单摆自水平开始下落，求下落至与水平方向成 θ 角时摆球的速率。

解：

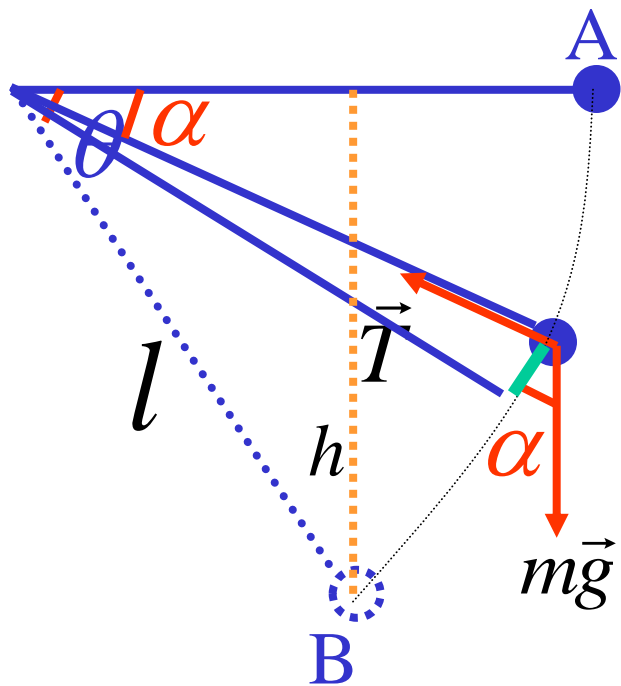
设单摆下落至角度 α 时



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_{\theta}^2 &= \sum A = A_{\vec{T}} + A_{m\vec{g}} \\ &= \boxed{\int_A^B \vec{T} \cdot d\vec{r}} + \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

\swarrow

$=0$



$$\frac{1}{2}mv_{\theta}^2 = \Sigma A = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_A^B mg \boxed{|d\vec{r}|} \cos \alpha$$

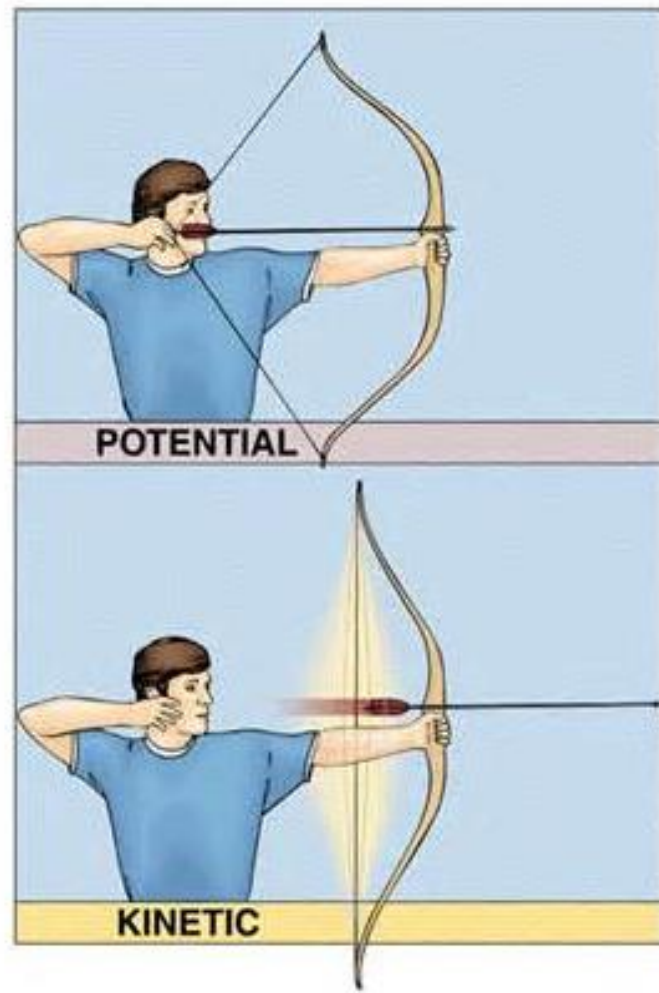
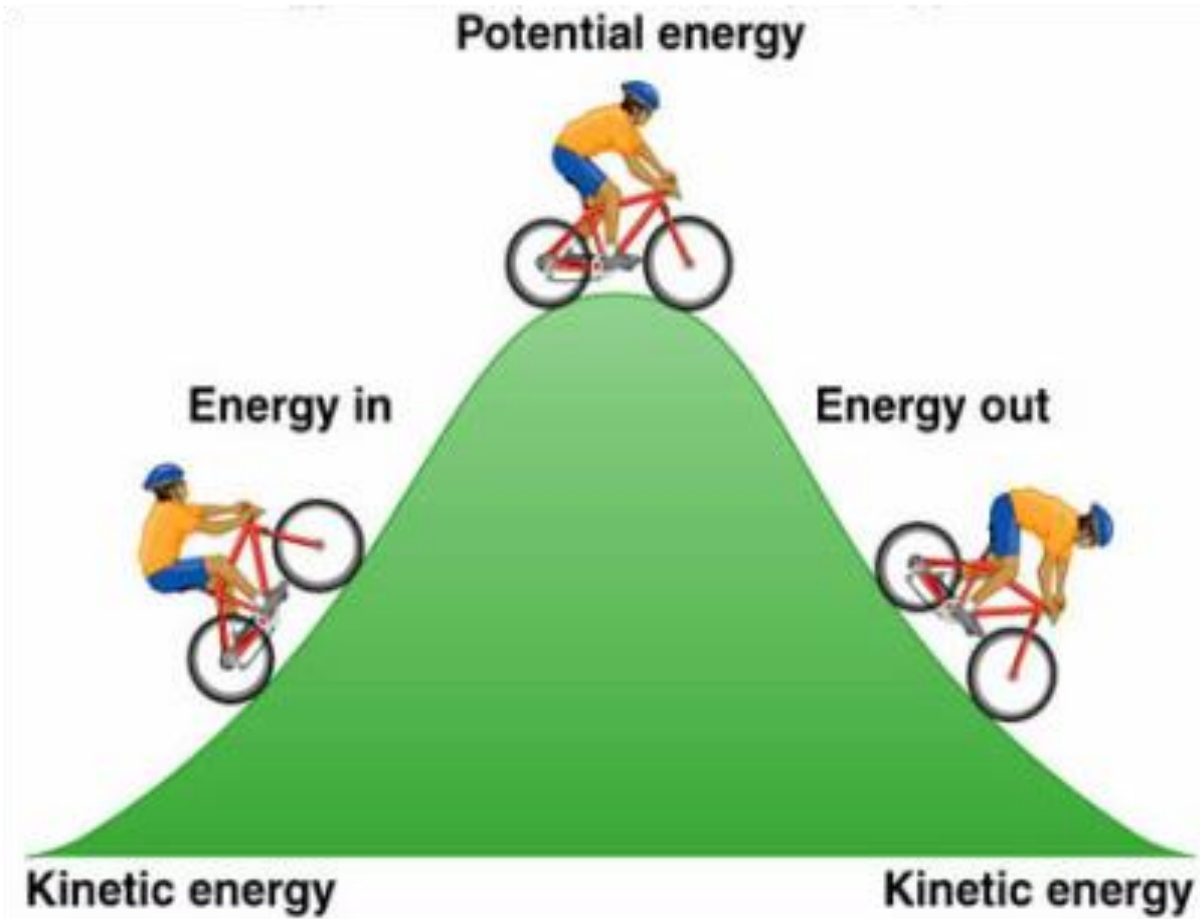
$$\boxed{l \cdot d\alpha}$$

$$= \int_0^{\theta} mg \cos \alpha \cdot l \cdot d\alpha$$

$$= mgl \sin \theta - 0 = mgh$$

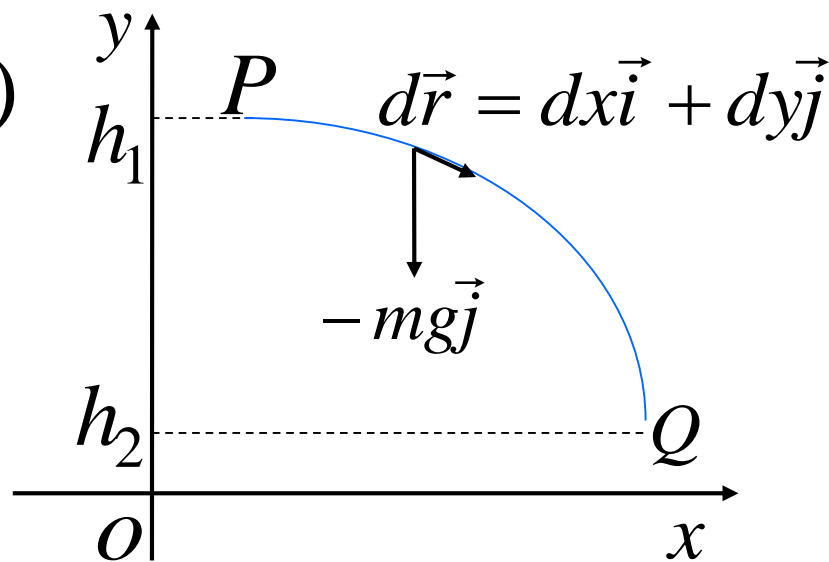
$$v_{\theta} = \sqrt{2gl \sin \theta} = \sqrt{2gh}$$

§ 3.5 势能



1. 重力做功

$$\begin{aligned} A &= \int_P^Q (-mg\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\ &= -\int_{h_1}^{h_2} mg dy \\ &= -(mgh_2 - mgh_1) \end{aligned}$$



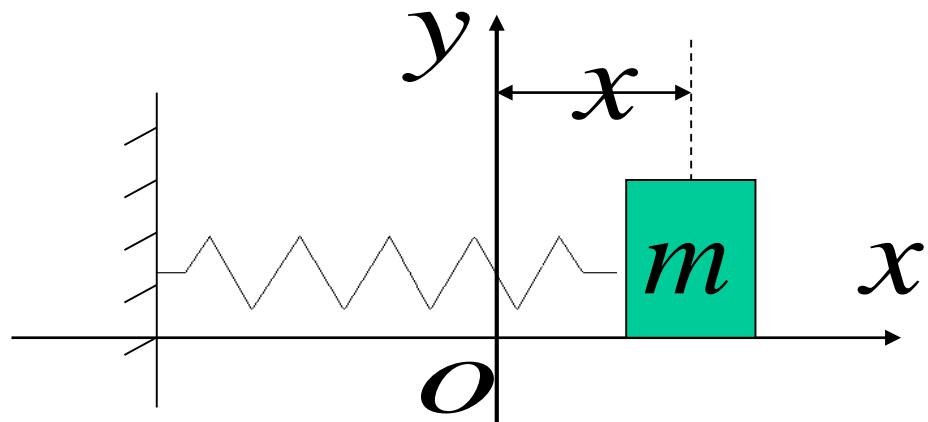
结论：重力做功与路径无关，只与始末位置有关

2. 弹簧弹力做功

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$= - \left(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 \right)$$



结论：弹簧弹力（回复力）做功与路径无关，只与始末位置有关。

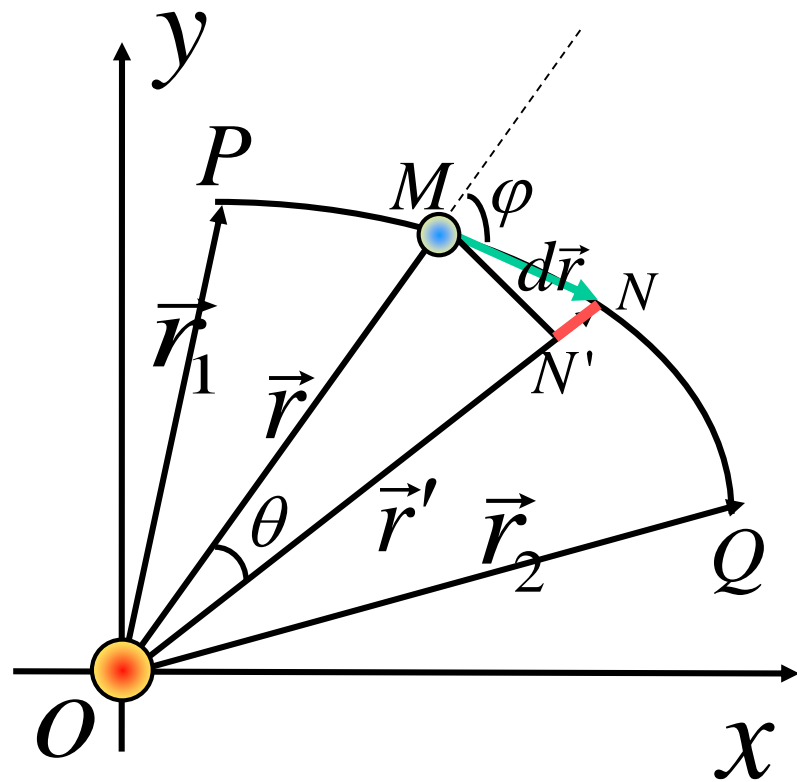
3. 万有引力做功

$$A = \int_p^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_p^Q -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{Gm_1m_2}{r^2} dr$$

$$= -\left[\left(-\frac{Gm_1m_2}{r_2}\right) - \left(-\frac{Gm_1m_2}{r_1}\right)\right]$$

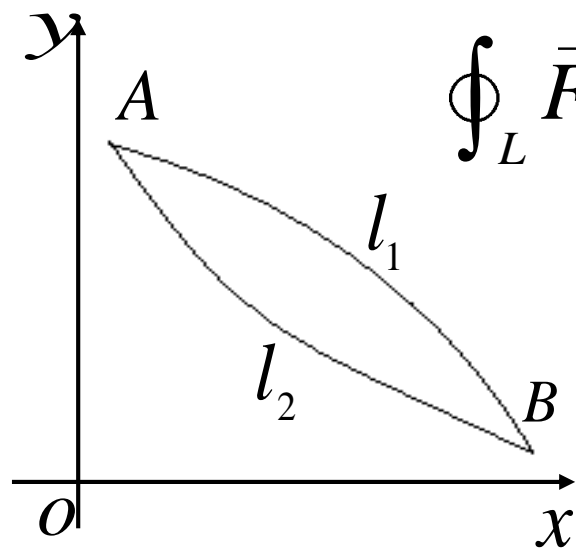


结论：万有引力做功与路径无关，只与始末位置有关，与具体路径无关。



4. 保守力与非保守力

- **保守力**：如果一对力所做的功与相对路径的形状无关，而只决定于相互作用的两质点的始末相对位置，这样的一对力称为保守力（例如重力，弹簧弹力和万有引力等）。
- **非保守力**：如果一对力所做的功与相对路径的形状有关，这样的一对力称为非保守力。



$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{l_1: A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{l_2: B \rightarrow A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\oint_L \vec{F}_{con} \cdot d\vec{r} = 0$$

■ 保守力沿闭合路径做功为零。

5. 势能

$$E_p = mgh$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$A_{12} = -(mgh_2 - mgh_1)$$

$$A_{12} = -(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2)$$

$$A_{12} = -[(-\frac{Gm_1m_2}{r_2}) - (-\frac{Gm_1m_2}{r_1})]$$

重力功

弹簧弹力功

万有引力功

$$A_{A \rightarrow B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

- 保守力做功特点：与路径无关，且数值为位置函数在两点函数值的差。
- 势能：与保守力做功相关的位置函数在某点的函数值。
- 保守力与势能关系：保守力做功等于势能增量的负值。

$$A_{A \rightarrow B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

- 势能是位置的函数，因此与参考点的选择有关；
- 在一个势场中，某一点的势能值是相对的，而两点之间的势能差值是绝对的；
- 当规定某一位置处势能为零时，即可给出其它点的势能相对值，**势能被规定为零的位置称为零势能参考点。**
- 在以保守力相互作用的系统中，将其中一个质点从A点移到零势能参考点时，保守力所做的功，称为系统在A点所具有的势能。

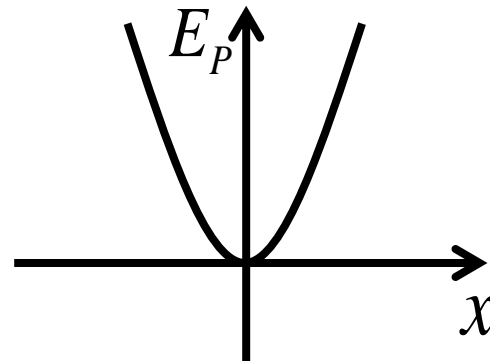
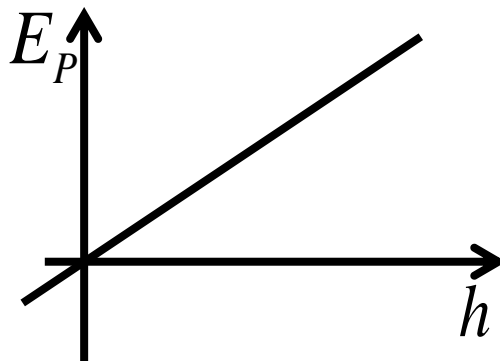
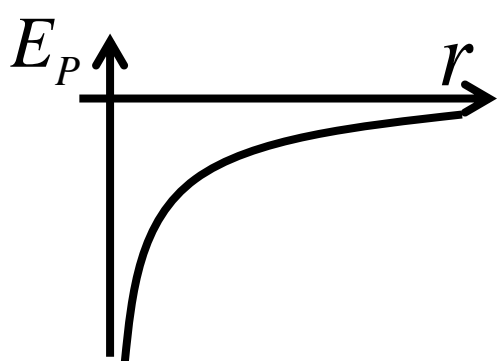
$$E_{p,A} = \int_A^{E_p=0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

势能零点的选择:

➤ 引力势能 $E_P = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ $r \rightarrow \infty, E_P = 0$

➤ 重力势能 $E_P = mgh$ $h \rightarrow 0, E_P = 0$

➤ 弹性势能 $E_P = \frac{1}{2}kx^2$ $x \rightarrow 0, E_P = 0$



➤ 由于决定保守力做功的是势能差而不势能的绝对值，因此参考点可以任意选择，以研究问题方便为宜。

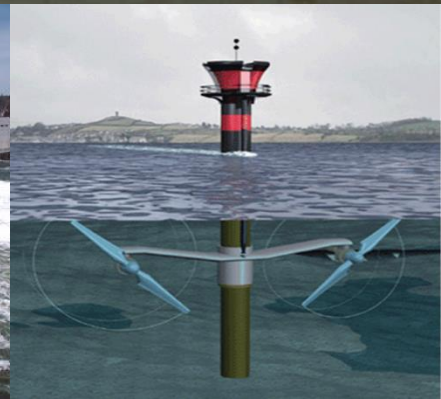
Note

$$A_{AB} = -\Delta E_p$$

- 势能只能在保守力的基础上定义；
- 系统势能的变化对应于相应保守内力所做的功；
- 势能是相互作用能，属于以保守力相互作用的整个系统，而不是系统中某个个体；
- 以相互作用的一方为参照系，只计算相互作用力对另一方做功的值，等于以第三方为参照系时，相互作用力双方共同做的功。

§3. 6

机械能守恒定律



1. 质点系的动能定理

➤ 质点系的内力：

✓ 保守内力：做功与路径无关，有相应势能.

✓ 非保守内力：做功与路径有关，无相应势能.

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{内力}} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{保守内力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{\text{外力}} - (E_{p2} - E_{p1}) + A_{\text{非保守内力}} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = (E_{p2} + E_{k2}) - (E_{p1} + E_{k1})$$

✚ 注意：系统的外力也有保守力、非保守力之分，但相互作用的双方不都在所研究的系统中，因而所做的功不构成所研究系统的势能.

2. 功能原理

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = (E_{p2} + E_{k2}) - (E_{p1} + E_{k1})$$

$$E = E_k + E_p$$

➤ **机械能**：系统的动能和势能之和称为机械能。

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_2 - E_1$$

➤ **功能原理**：当系统从状态 1 变化到状态 2 时，其机械能的增量等于系统外力及非保守内力做功之和。

Note

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_2 - E_1$$

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{内力}} = E_{k2} - E_{k1}$$

➤ 功能原理说明只有外力及非保守内力才能改系统的机械能；

➤ 功能原理与动能定理并无本质差别：

■ **功能原理**：引入了势能概念，因而无需计算保守内力所做的功；

■ **动能定理**：未引入势能概念，因而应计算包括保守内力在内的所有力所做的功。

3. 机械能守恒定律

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = \Delta E$$

如果 $A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$ ，则 $\Delta E = 0$

$$E_2 = E_1$$

即

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}$$

● **机械能守恒定律：**如果系统内除保守内力以外，其它外力及非保守内力都不做功，那么系统的总机械能保持不变。

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0, \quad \Delta E = 0$$

Note

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0, \text{ 则 } \Delta E = 0$$

- 机械能守恒的条件： $A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$
- 机械能守恒定律是普遍能量守恒定律的特例；
(能量守恒定律：能量不能消灭，只能转化或传递。)
- 对于孤立的保守系统，机械能守恒，则动能的增加一定伴随着等量势能的减少，保守内力是动能与势能转化的手段与量度。

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

4. 守恒定律的意义

- 自然界的一切过程都遵守守恒定律，若有违反，可能孕育着未被认识的事物——守恒定律是寻找和发现新事物的理论依据；
- 凡违背守恒定律的过程都不能实现——守恒定律是判断一个过程能否实现的依据；
- 守恒定律是解决实际问题的有力工具，如光与原子的作用，过程的细节相当复杂，但可利用守恒定律加以研究；
- 近代物理证明守恒定律是自然界对称性的结果。

- 空间平移对称性——动量守恒定律

物理现象的发展过程与其在空间的位置无关

- 空间转动对称性——角动量守恒定律

物理现象的发展过程与其在空间的取向无关

- 时间平移对称性——能量守恒定律

物理现象的发展过程与其开始时间无关

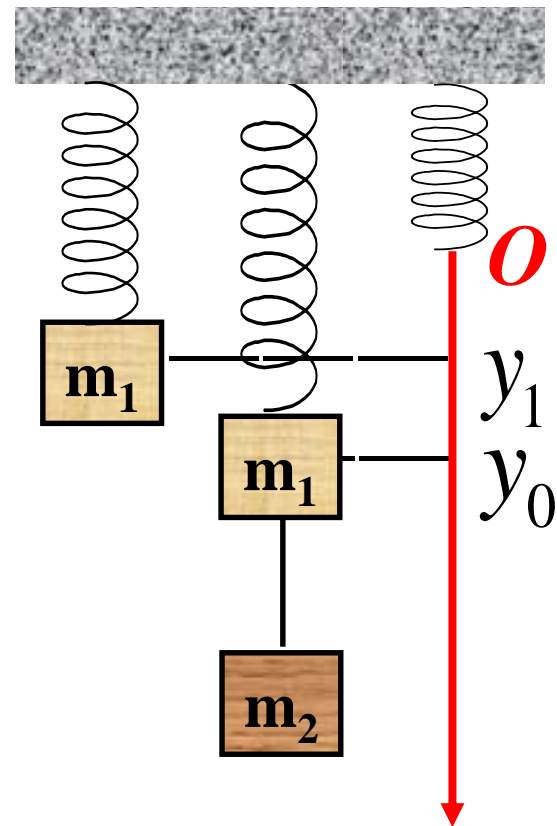
例：两质量分别为 m_1 和 m_2 的木块挂在轻质弹簧下保持静止，弹簧的弹性系数为 k . 若木块 m_2 被释放，求 m_1 的最大速率.

分析：释放后，选择**弹簧、 m_1 和地球**为所研究的系统，则系统中只有保守力做功（重力，弹力），系统的机械能守恒.

选择弹簧原长处为坐标原点： $(m_1 + m_2)g = ky_0$

当所受重力与弹力相等时， m_1 具有最大的速率，此时其坐标为 y_1 ：

$$m_1 g = ky_1$$



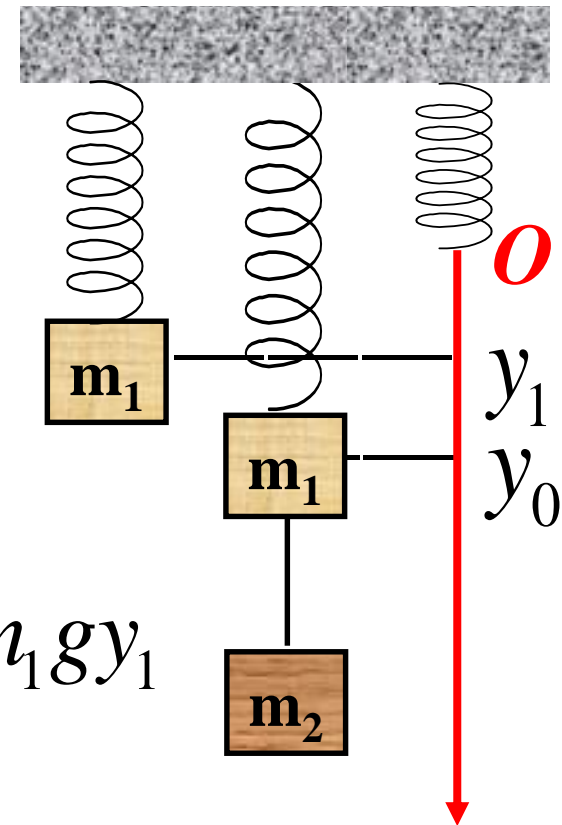
$$(m_1 + m_2)g = ky_0$$

$$m_1 g = ky_1$$

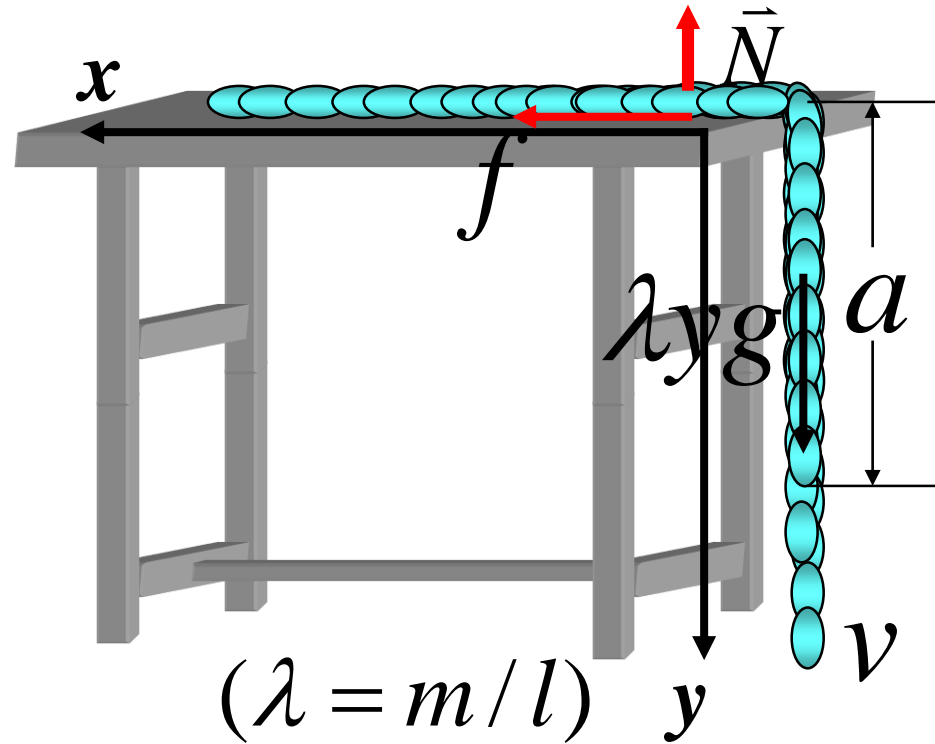
机械能守恒：

$$\frac{1}{2}ky_0^2 - m_1gy_0 = \frac{1}{2}m_1v_m^2 + \frac{1}{2}ky_1^2 - m_1gy_1$$

$$v_m = \sqrt{\frac{m_2^2 g^2}{km_1}}$$



例：质量为 m ，总长为 l 的匀质链条，成直线状放在高为 l 的桌面上，桌面与链条之间的摩擦系数为 μ 。现已知链条下垂长度为 a 时，链条开始下滑，试计算链条刚巧全部离开桌面时的速率。



解：利用动能定理

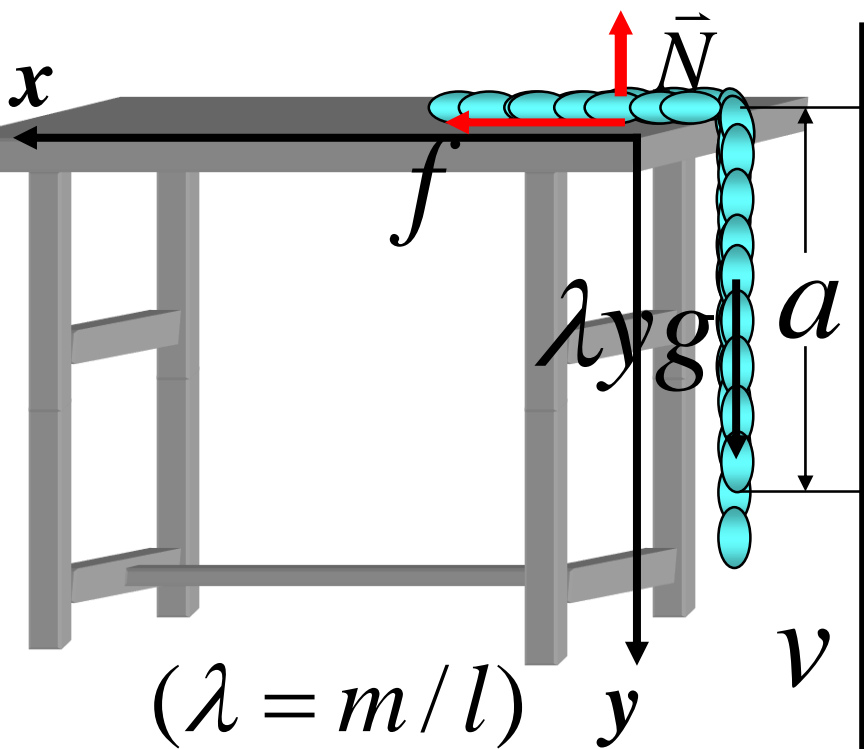
以链条为研究对象

$$A_W + A_f = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

重力的功：

$$dA_W = \lambda y g dy$$

$$A_W = \int_a^l \lambda g y dy$$



重力的功:

$$A_W = \int_a^l \lambda g y dy$$

$$A_W = \lambda g (l^2 - a^2) / 2$$

$$A_W = \frac{mg}{2l} (l^2 - a^2)$$

摩擦力的功:

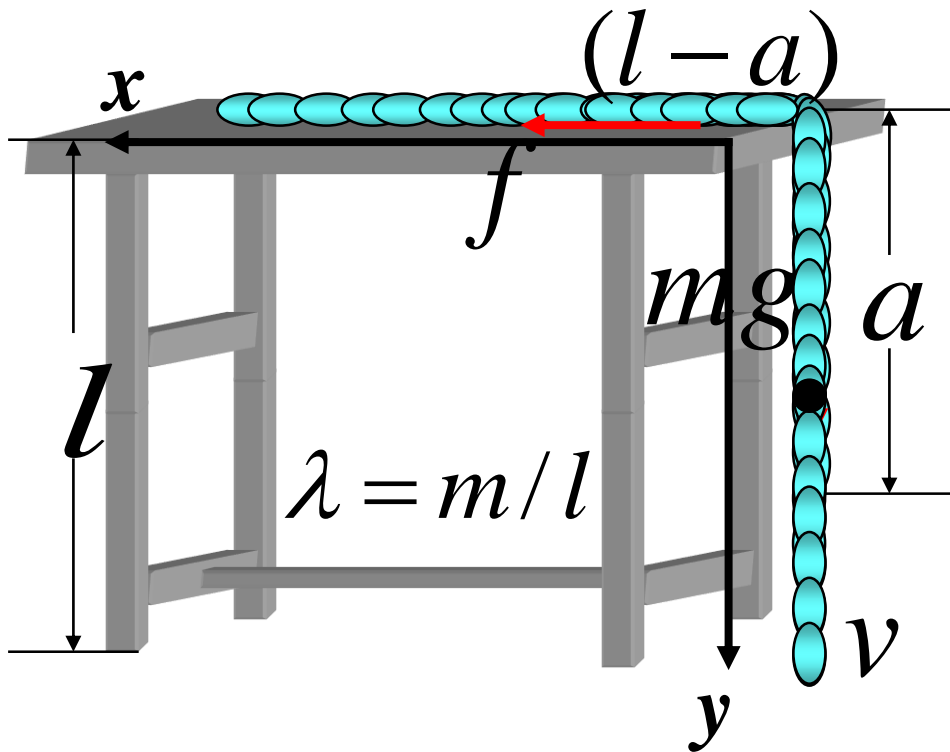
$$A_f = \int_{l-a}^0 \mu \lambda g x dx$$

$$= -\mu \lambda g (l-a)^2 / 2$$

$$A_f = -\frac{\mu mg}{2l} (l-a)^2$$

$$A_W + A_f = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} [(l^2 - a^2) - \mu (l-a)^2]}$$



以链条和地球为研究对象，由功能原理：

$$A_f = E_2 - E_1$$

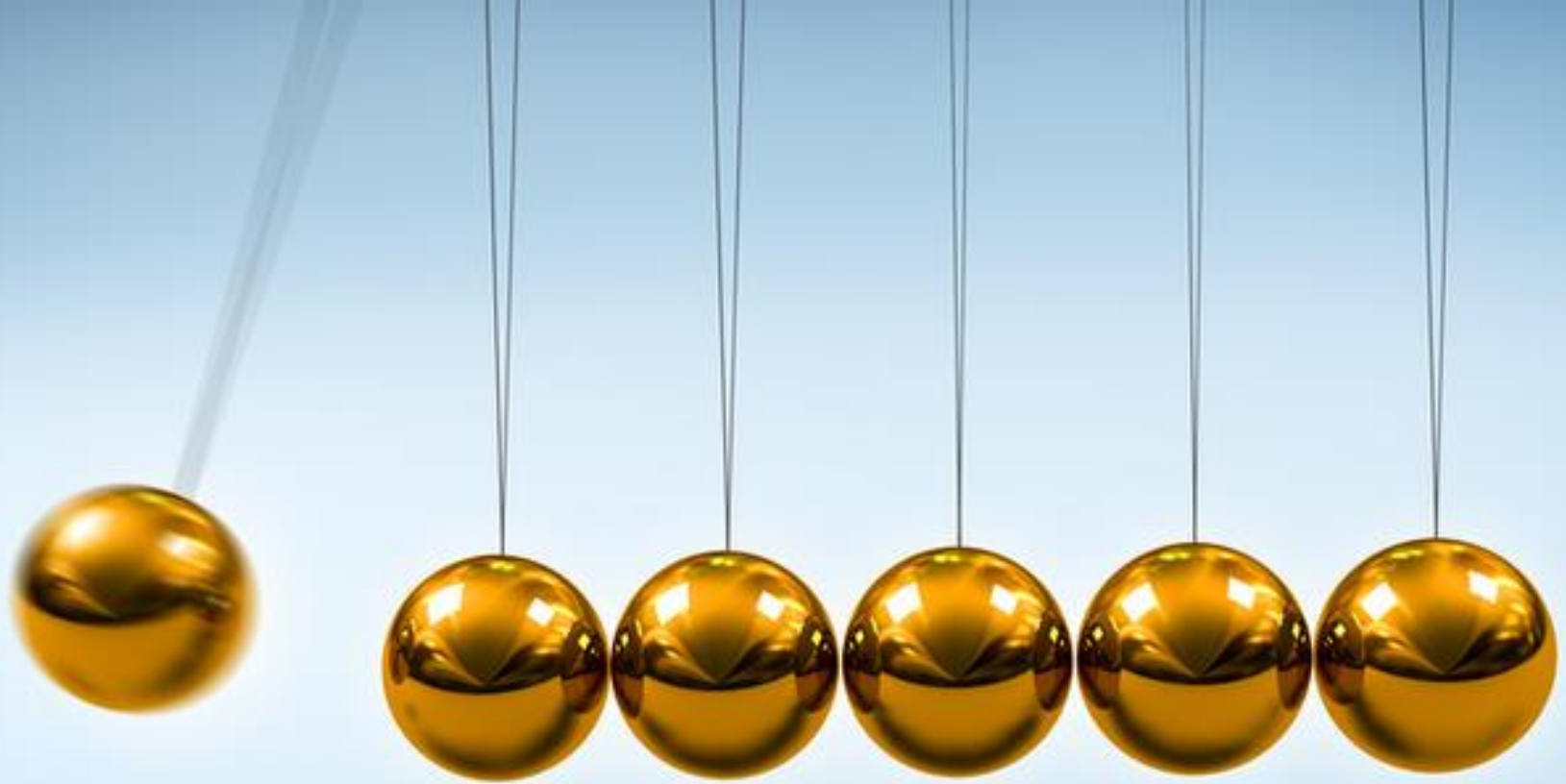
$$A_f = -\frac{\mu mg}{2l} (l-a)^2$$

以地面为
势能零点：

$$E_1 = \lambda(l-a)gl + \lambda ag(l - \frac{a}{2})$$

$$E_2 = mg \frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} [(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2]}$$

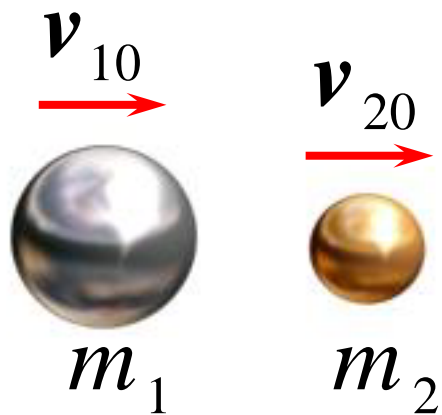


§ 3.7 碰撞

碰撞过程 { 完全弹性碰撞
完全非弹性碰撞
非完全弹性碰撞

1. 完全弹性碰撞

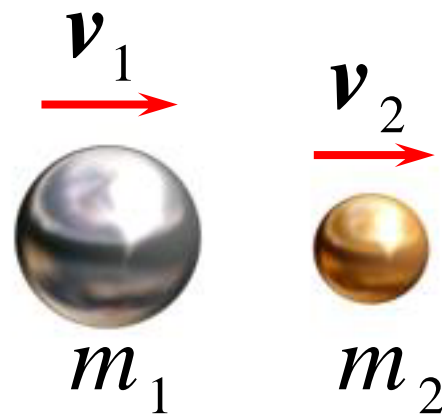
► 特点：机械能守恒，动量守恒.



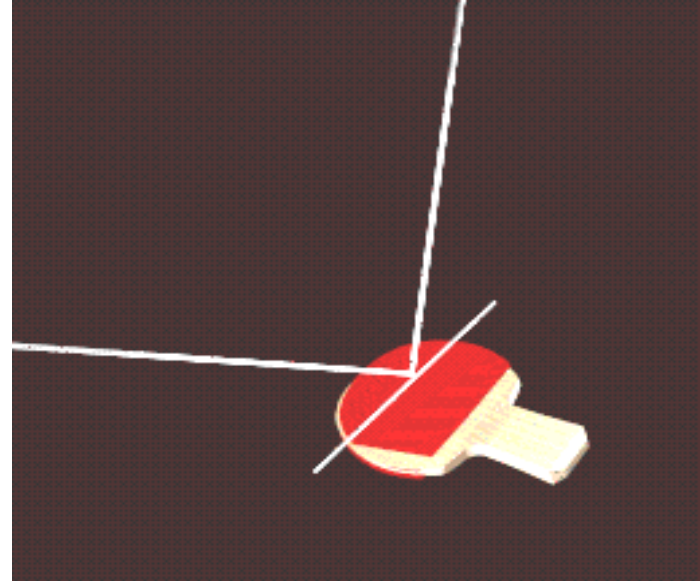
碰撞前



碰撞时



碰撞后



由机械能守恒:

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

由动量守恒:

$$m_1v_{10} + m_2v_{20} = m_1v_1 + m_2v_2$$

联立求解:

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2}$$

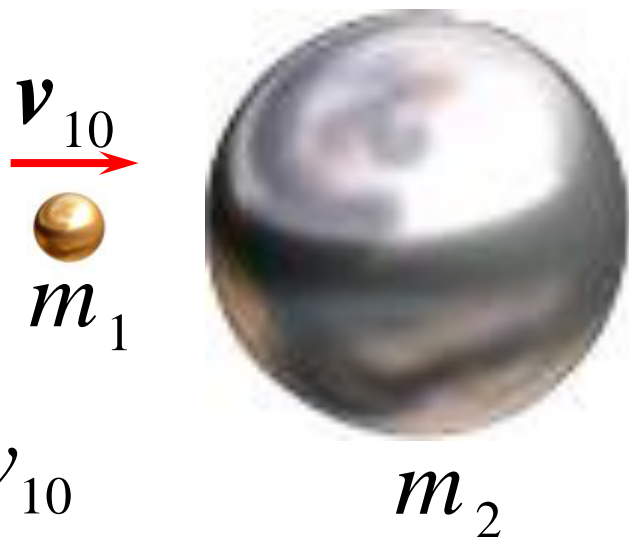
$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2}$$

➤ 讨论

(1) $m_1 \ll m_2, v_{20} = 0$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \approx -v_{10}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \approx 0$$

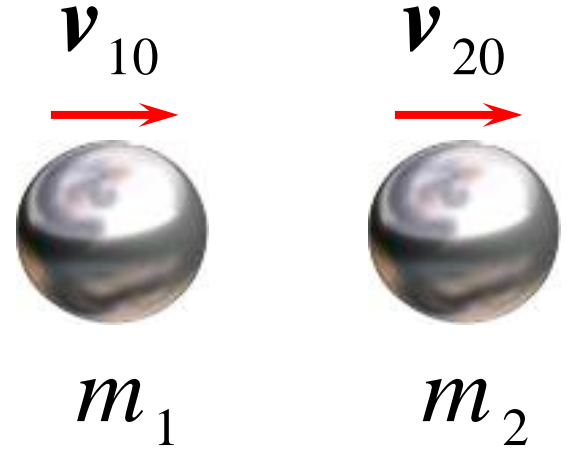


当 $m_1 \ll m_2$ 且第二个球静止时，碰撞后，第一个球以原速率反弹回来，而第二球仍保持静止。

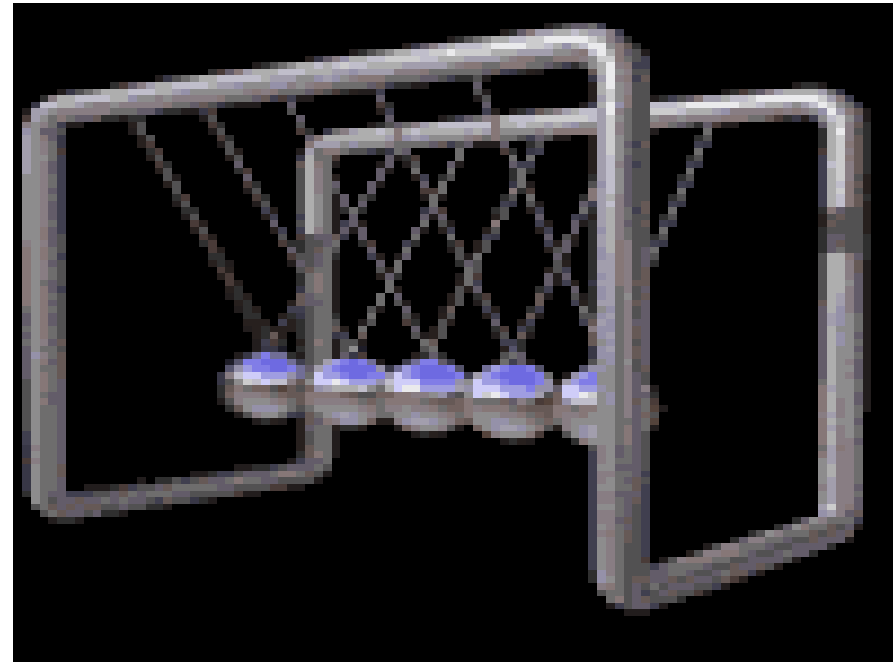
(2) $m_1 = m_2$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} = v_{20}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} = v_{10}$$



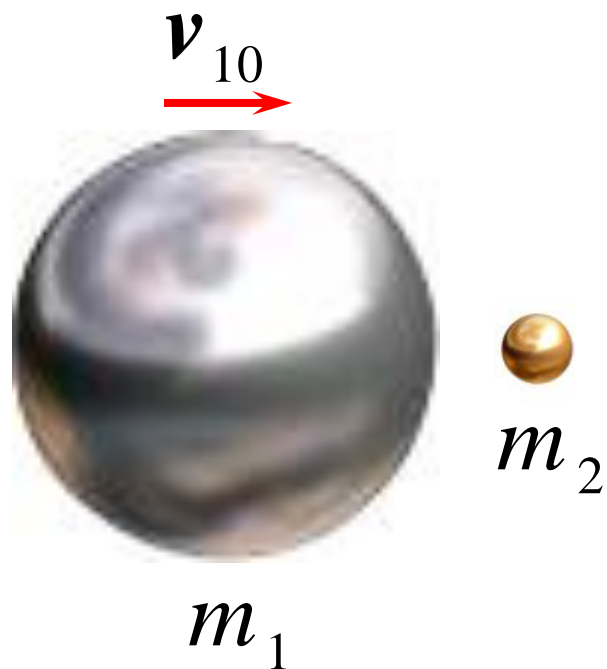
相同质量的两个球发生弹性碰撞，碰撞后，两球速度交换。



(3) $m_1 \gg m_2, v_{20} = 0$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \approx v_{10}$$

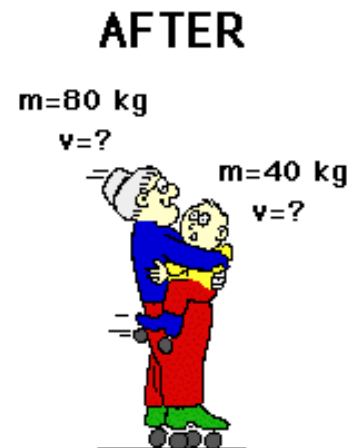
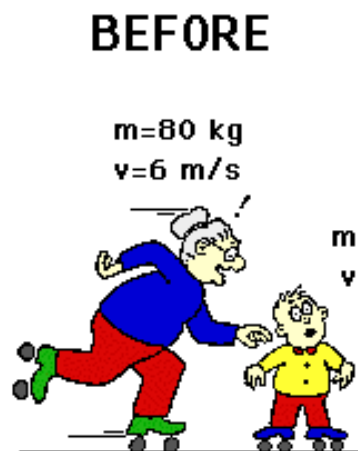
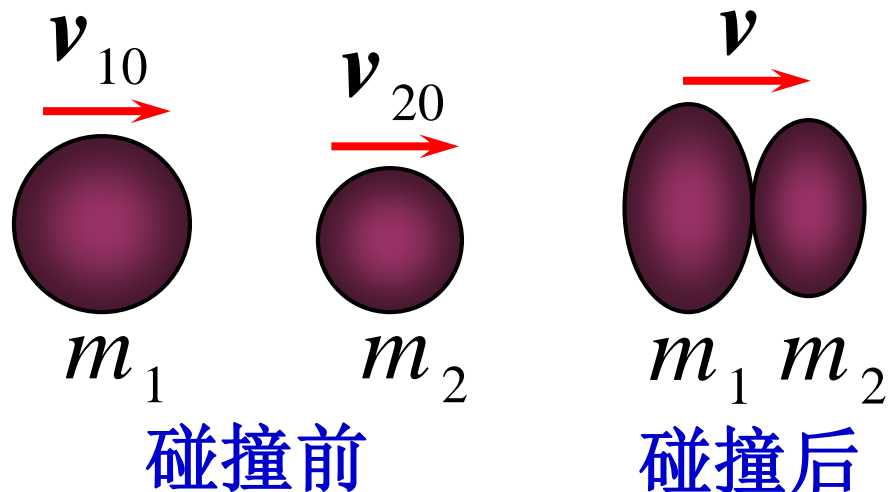
$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \approx 2v_{10}$$



当 $m_1 \gg m_2$ 且第二个球静止时，碰撞后，第一个球保持原速率不变，而第二个球以 2 倍于第一个球初速率的速率运动。

2. 完全非弹性碰撞

➤ 特点：动量守恒，机械能不守恒；碰撞后两物体合为一体，系统形变能量不能恢复。



$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$$

$$m_1 v_{10}^2 / 2 + m_2 v_{20}^2 / 2 = (m_1 + m_2) v^2 / 2$$

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

