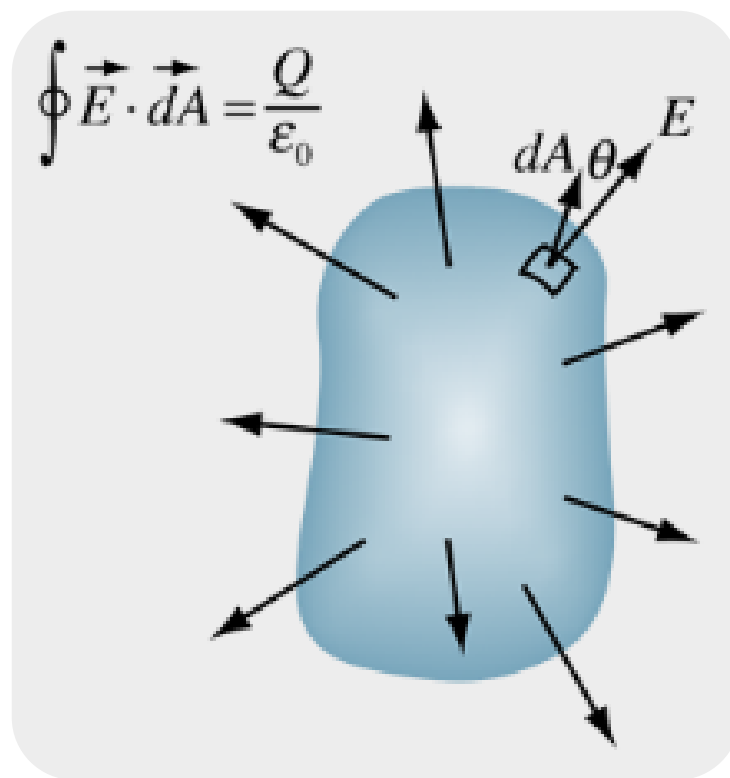


高斯定律



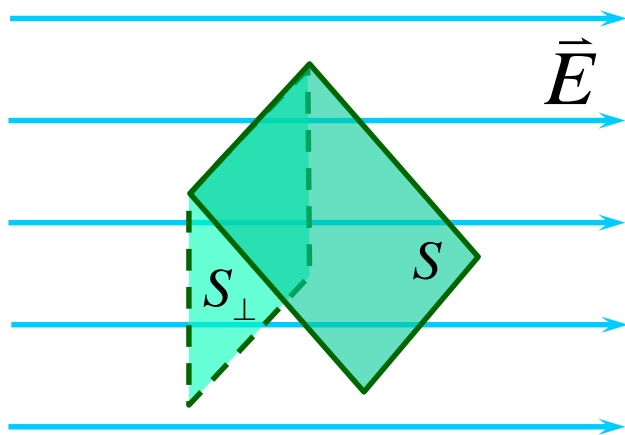
§ 6.5 电场线和电通量

一、电场线

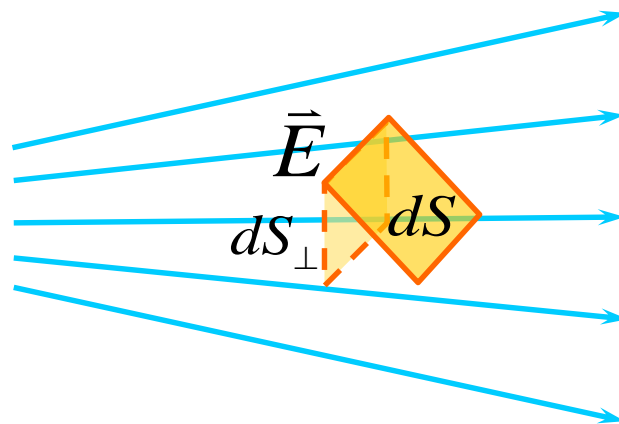
$$|\vec{E}| = E = dN / dS_{\perp}$$

1. 电场线与电场强度的关系

- 曲线上每一点的切线方向为该点电场强度的方向；
- 垂直于电场方向的单位面积上通过的电场线数目与该点电场强度的大小相等。



$$|\vec{E}| = E = N / S_{\perp}$$

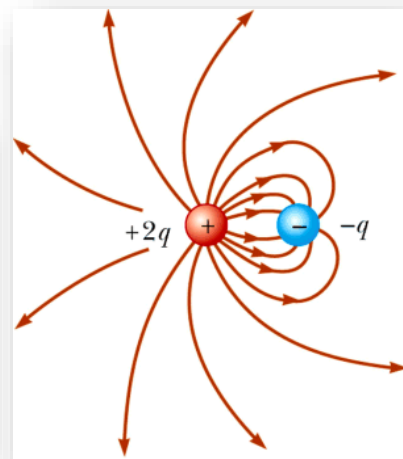
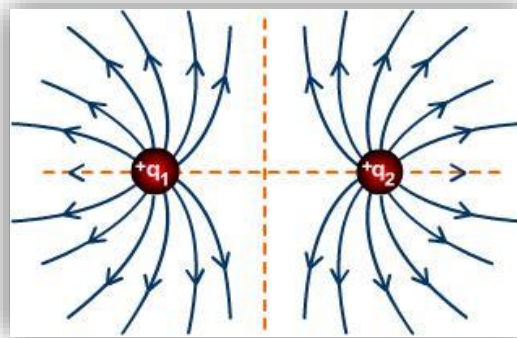
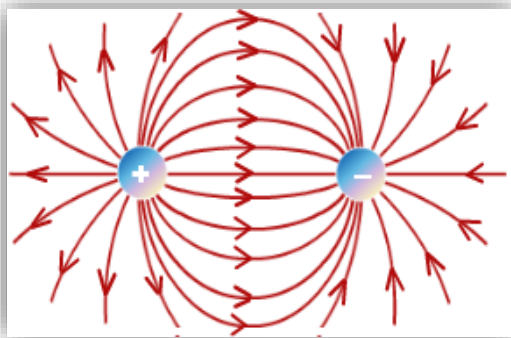
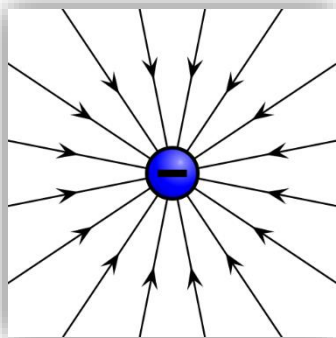


$$|\vec{E}| = E = dN / dS_{\perp}$$

2. 电场线的性质

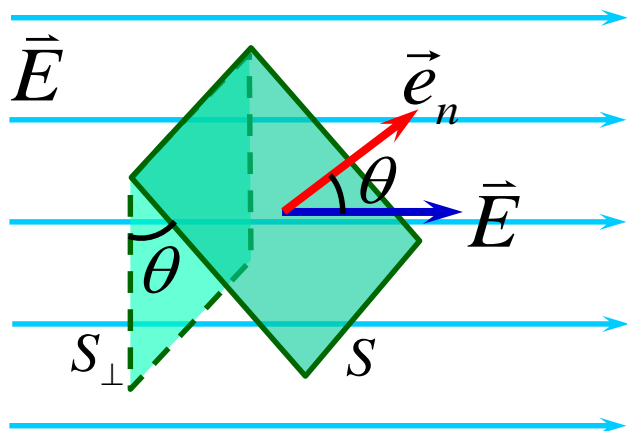
- 电场线起始于正电荷(或无穷远处), 终止于负电荷(或无穷远处), 不会在没有电荷处中断;
- 若带电体中正、负电荷一样多, 则由正电荷出发的全部电场线都集中于负电荷;
- 两条电场线不会相交;
- 静电场的电场线不会形成闭合曲线。

常见电场的电场线:

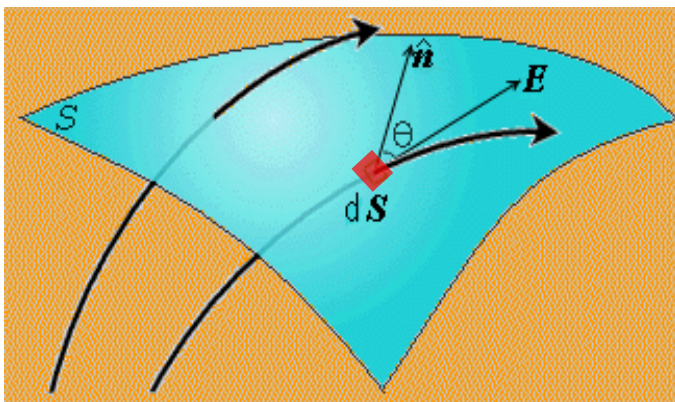


二、电通量

1. 定义：穿过某一有向曲面的电场线数。
2. 电通量的计算：



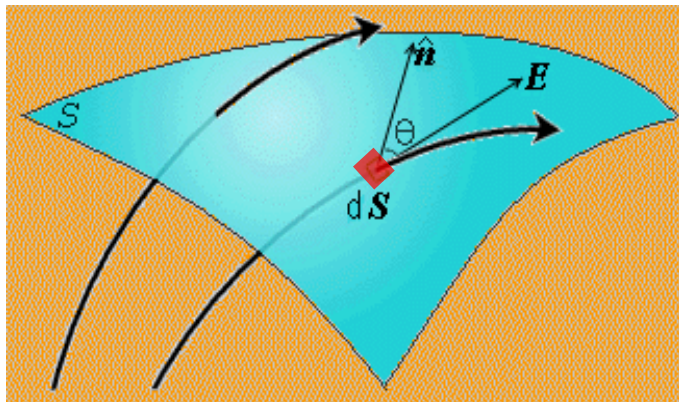
$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= E = N / S_{\perp} \\ N &= ES_{\perp} = ES \cos \theta \\ \vec{S} &= S \vec{e}_n \\ \Phi_e &= N = ES \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{S} \end{aligned}$$



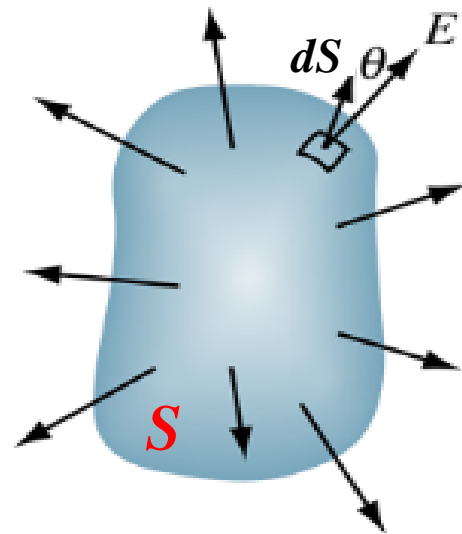
$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

2. 电通量的计算:



$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

3. 电通量的性质:

- 对于闭合曲面上的面元, 选择外法线方向为正方向;
- 电通量是标量, 其数值可以为正值、负值或零:
 - 当 $0 \leq \theta < 90^\circ$ 时, $\Phi_e > 0$;
 - 当 $\theta = 90^\circ$ 时, $\Phi_e = 0$;
 - 当 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, $\Phi_e < 0$.

§ 6.6 高斯定律

一. 表述:

在真空中, 通过任一闭合曲面的电场强度通量, 等于该曲面内所包围的所有电荷的代数和除以 ϵ_0 , 与曲面外的电荷无关 (闭合曲面称为高斯面).

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

- 高斯面上各点的电场强度 \vec{E} 与哪些电荷有关?
- 高斯面内各点的电场强度 \vec{E} 与哪些电荷有关?
- 高斯面外各点的电场强度 \vec{E} 与哪些电荷有关?
- 哪些电荷对电场强度 \vec{E} 的通量 Φ_e 有贡献?

二. 高斯定律的得出

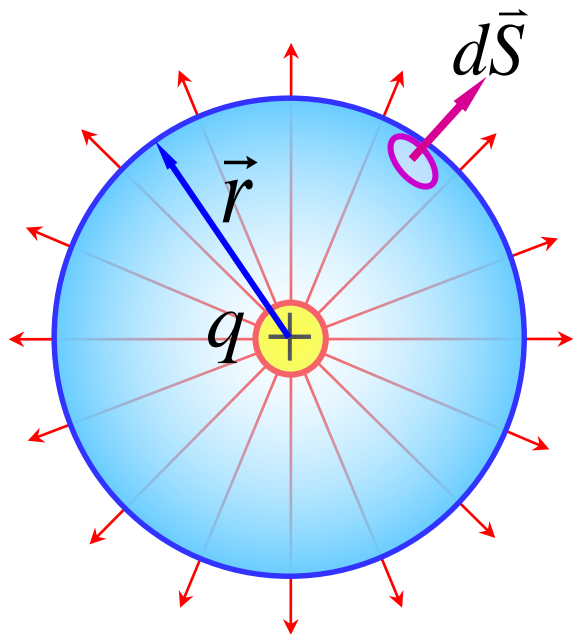
$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

库仑定律
电场强度叠加原理



高斯定律

1. 特殊情况：点电荷位于球形高斯面的中心



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS$$

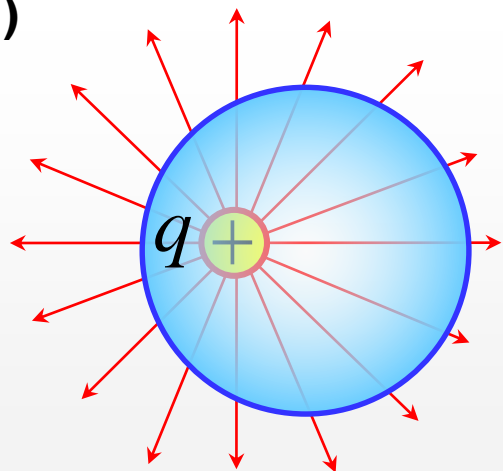
$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

二. 高斯定律的得出

2. 一般情况:

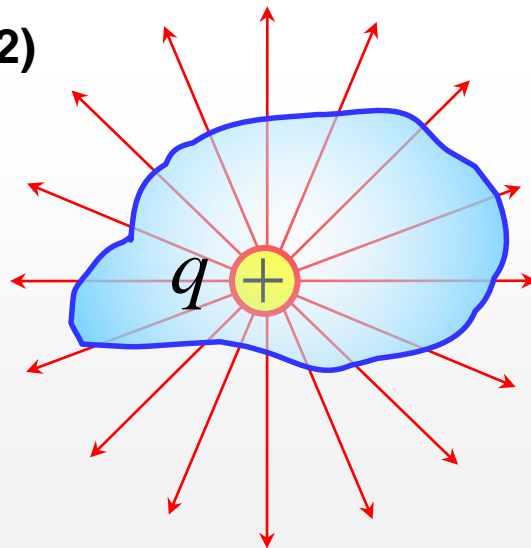
$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

(1)



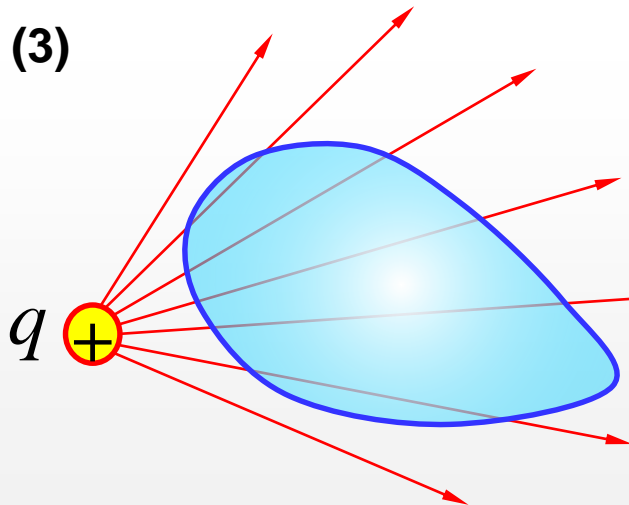
$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(2)



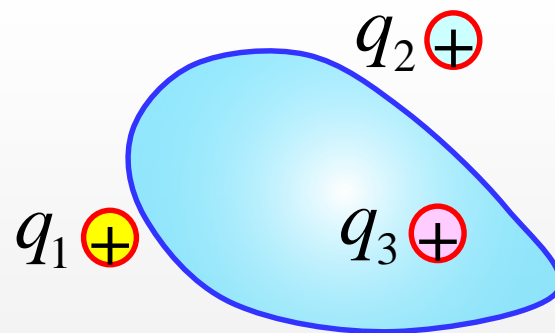
$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(3)



$$\Phi_e = 0$$

(4)



$$\Phi_e = \frac{q_3}{\epsilon_0}$$

三. 对高斯定律的说明

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

- 高斯面为封闭曲面，是人为设定的辅助面(数学曲面).
- 穿出高斯面的电场强度通量 Φ_e 为正，穿入为负.
- 定律中的电场强度 \vec{E} 由高斯面内、外的所有电荷共同激发.
- 定律中的电场强度通量 Φ_e 仅由高斯面内的电荷产生，高斯面外的电荷对电场强度通量无贡献.
- 静电场是有源场，其场源即为电荷.
- 高斯定律是静电场的基本规律之一，也是普遍电磁场理论的基本方程之一.
- 高斯定律对于运动电荷仍然有效.

§ 6.6 利用高斯定律求解电场的分布

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{S_{\text{内}}} dq$$

➤ 应用条件

- ◆ 能够利用高斯定律求解的电场分布，必须具有一定对称性！
- ◆ 常见的对称性：球对称、柱对称、平面对称

➤ 解题步骤

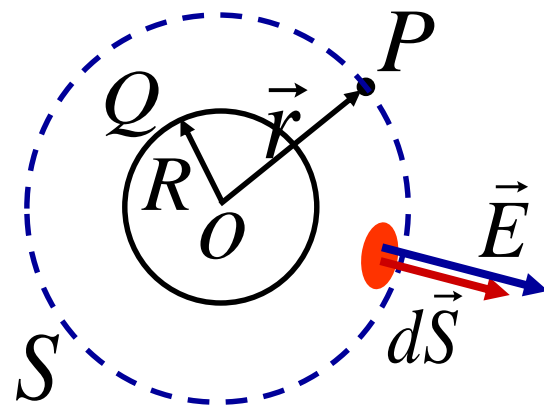
- ◆ 对称性分析；
- ◆ 根据对称性选择合适的高斯面；
- ◆ 应用高斯定律计算电场强度。

例1. 均匀带电球面，总电量为 Q ，半径为 R .

求：电场分布.

解：根据电荷分布的球对称性，取过任意场点 P ，以 O 为球心的同心球形高斯面

高斯面的电通量：



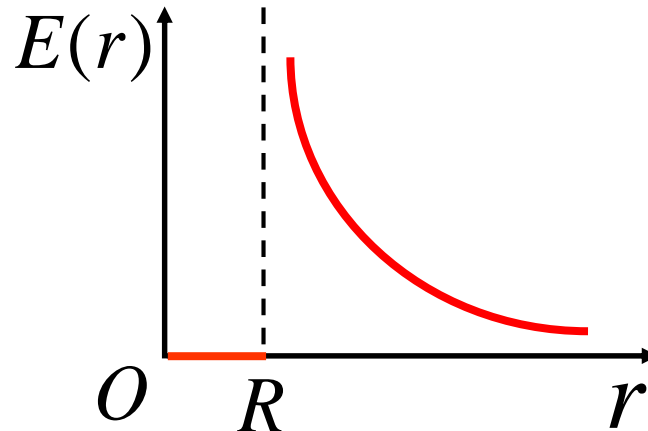
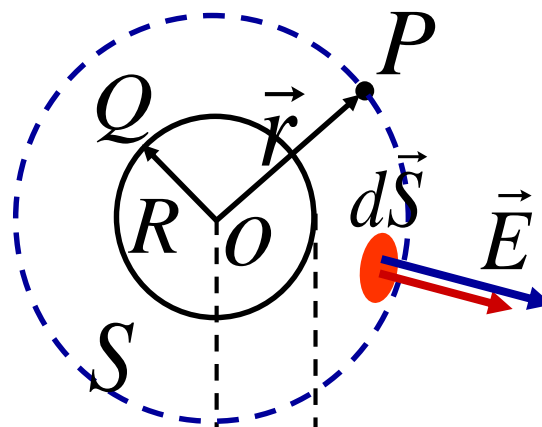
$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = 4\pi r^2 E$$

根据高斯定律：

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_S q_{in} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_S q_{in}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_s q_{in}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \dots (0 \leq r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \dots (R < r < \infty) \end{cases}$$



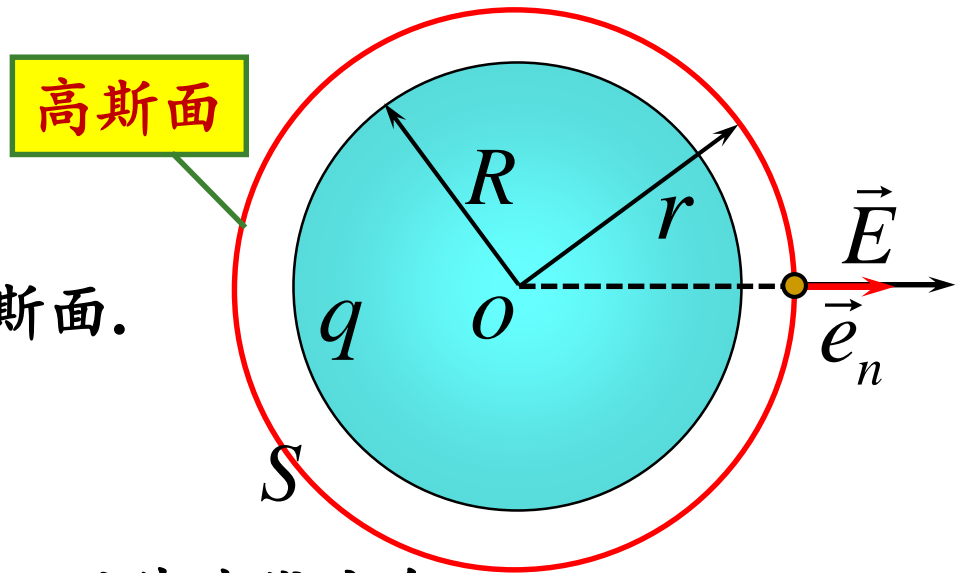
例2：半径 R 、带电量为 q 的均匀带电球体，计算球体内、外的电场强度。

解(1)：球体外部， $r > R$

做半径为 r 的同心球面 S 为高斯面。

面内电荷代数和 $\sum_S q = q$

球面上各点的场强 \vec{E} 大小相等，沿外法线方向。



$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS \cos \theta = E \oiint_S dS = \frac{\sum_s q}{\epsilon_0}$$

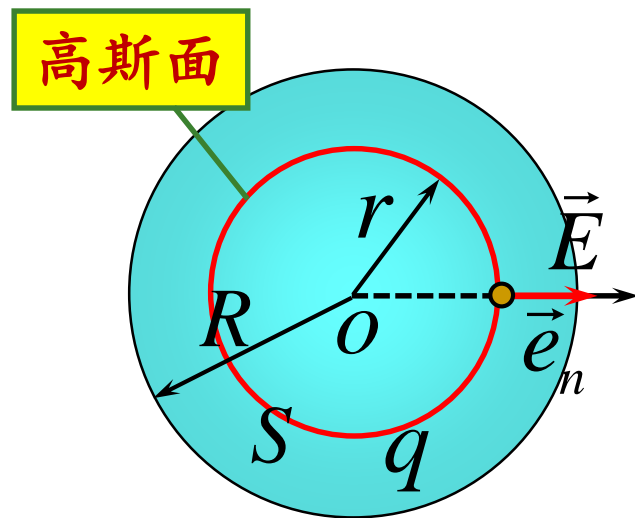
$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

解(2): 球体内部 $r < R$

做半径为 r 的同心球面 S 为高斯面。

面内电荷代数数和为:

$$\sum_S q = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3}$$



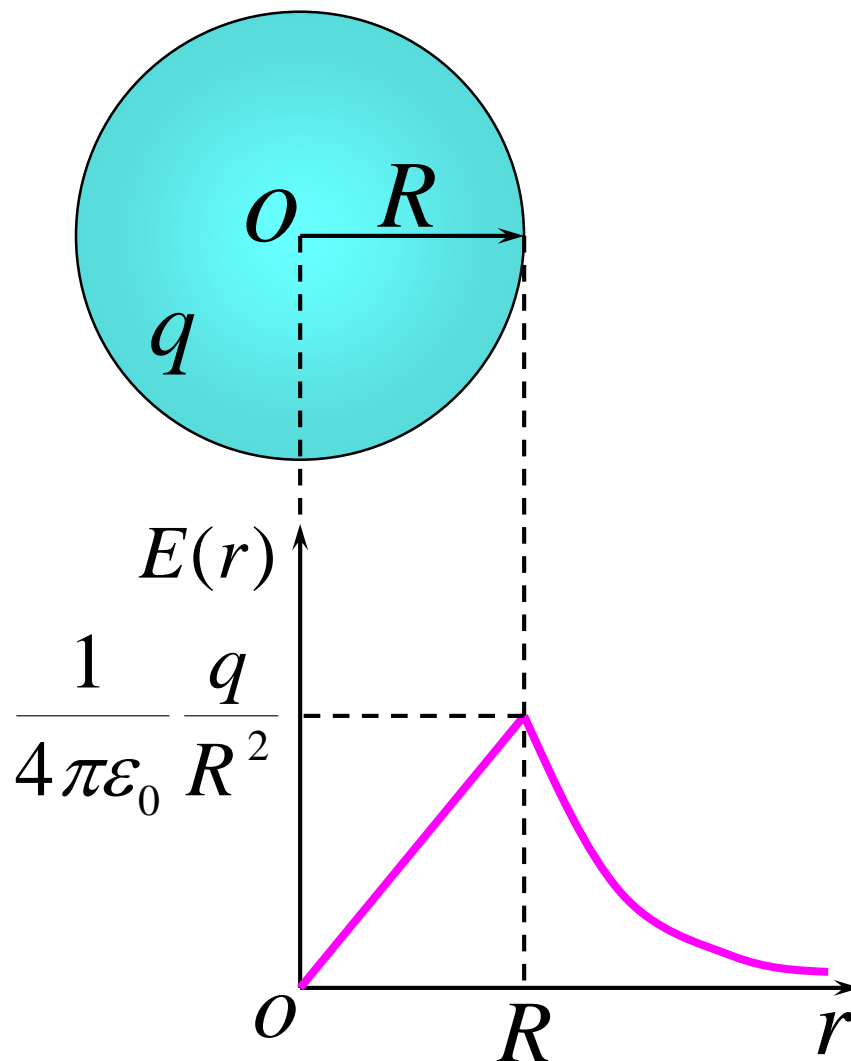
球面上各点的场强 \vec{E} 大小相等, 沿外法线方向。

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS \cos \theta = E \oiint_S dS = \frac{\sum_S q}{\epsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{\epsilon_0 R^3} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r \propto r$$

半径 R 、带电量为 q 的均匀带电球体电场强度：

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \vec{e}_r \cdots (0 < r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \cdots (R < r < \infty) \end{cases}$$



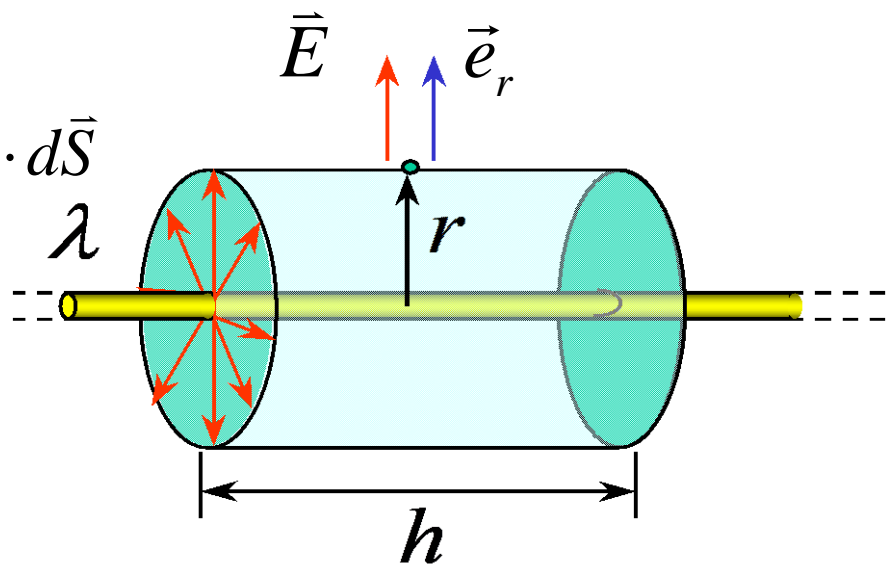
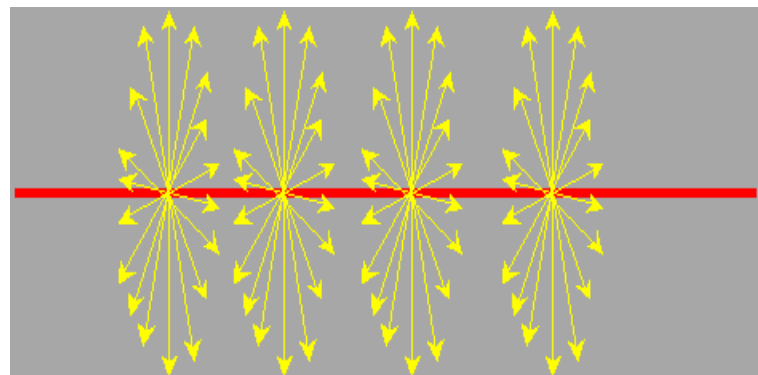
例3. 无限长均匀带电直线的电场强度.

无限长均匀带电直线，电荷线密度为 λ ，求与直线距离为 r 处的电场强度.

解： 对称性分析——轴对称

选取以直线为轴的闭合柱形高斯面，半径为 r ，高为 h

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\&= \iint_{\text{上底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{下底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\&= \iint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \iint_{\text{侧面}} dS \\&= 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r}\end{aligned}$$



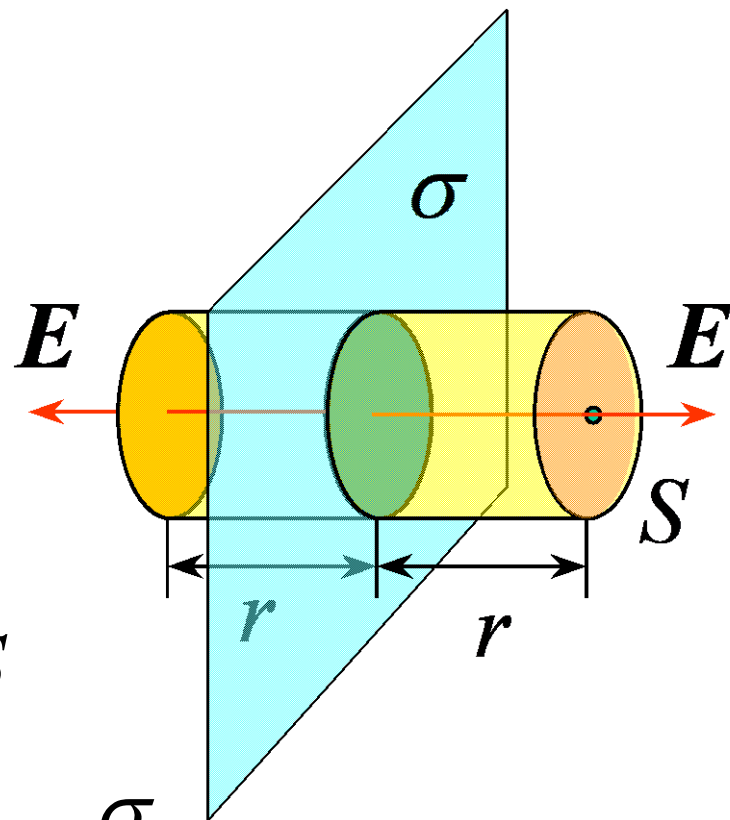
例4.求均匀带电无限大薄板的场强分布，设电荷面密度为 σ .

解：由对称性分析，平板两侧与板等距离处场强大小相等，方向均垂直于平板.取一对称轴垂直于平面，高为 $2r$ 的圆柱面为高斯面，通过它的电通量为

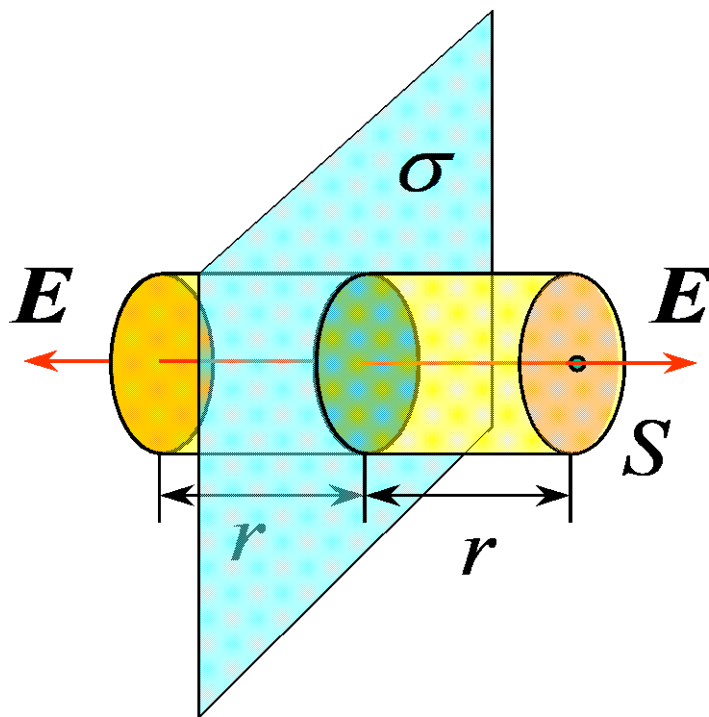
$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_{\text{侧面}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{底面}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_{\text{底面}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES\end{aligned}$$

S 内包围的电荷为： $\sum q_{\text{内}} = \sigma \cdot S$

由高斯定律： $2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



电荷面密度为 σ 的均匀带电无限大薄板的场强分布.

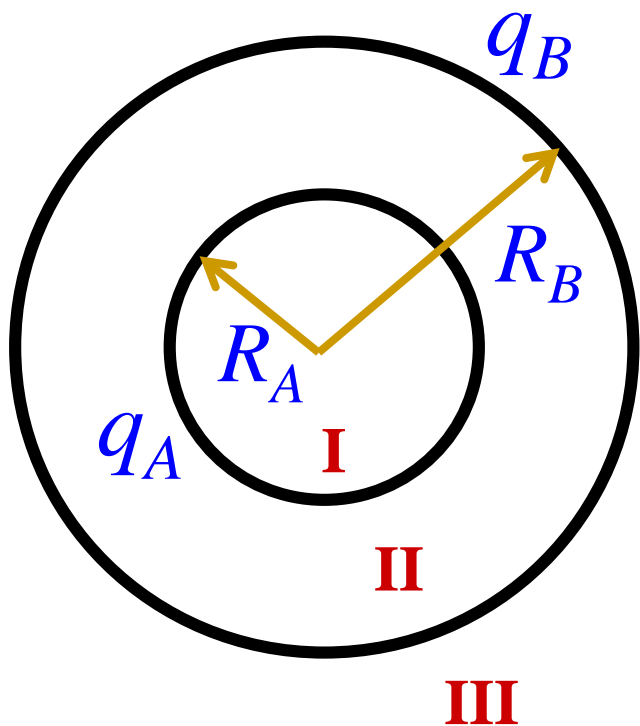


$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

当 $\sigma > 0$ 时, \vec{E} 的方向垂直并远离平面;

当 $\sigma < 0$ 时, \vec{E} 的方向垂直并指向平面.

例5. 两均匀带正电的导体球壳(彼此绝缘), 半径分别为 R_A 和 R_B , 带电量分别为 q_A 和 q_B . 求空间中的电场分布情况.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\text{I}} = 0 \\ \vec{E}_{\text{II}} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \\ \vec{E}_{\text{III}} = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{array} \right.$$

小结

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_{\text{内}}} dq$$

➤ 应用条件

- ◆ 能够利用高斯定律求解的电场分布，必须具有一定对称性！
- ◆ 常见的对称性：球对称、柱对称、平面对称

➤ 解题步骤

- ◆ 对称性分析；
- ◆ 根据对称性选择合适的高斯面；
- ◆ 应用高斯定律计算电场强度。

➤ 高斯面特点

- ◆ 部分表面上各点电场强度 \vec{E} 大小相等，且与 $d\vec{S}$ 夹角相同；
- ◆ 部分表面上通量为0，即 \vec{E} 与 $d\vec{S}$ 垂直。

小结

➤ 电通量

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

➤ 高斯定律

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

➤ 无限大带电平面的电场

$$E = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$