

第7章 电势

§ 7.1 静电场的保守性

§ 7.2 电势差和电势

§ 7.3 电势叠加原理

§ 7.4 电势梯度

§ 7.5 电荷在外电场中的静电势能

§ 7.6 静电场的能量

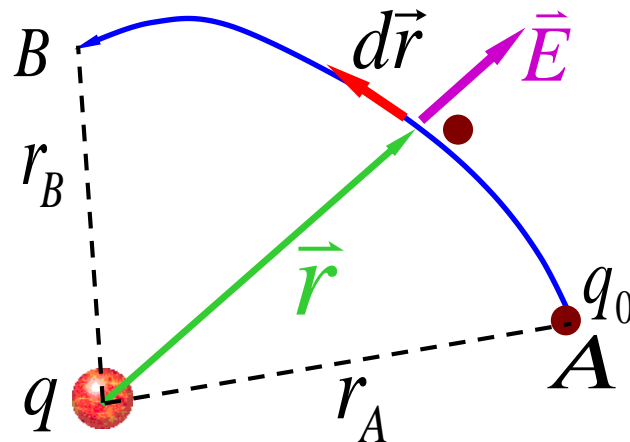
§ 7.1 静电场的保守性

一、静电场力做功特点

1. 点电荷的电场

$$\begin{aligned} dA &= q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} r dr \end{aligned}$$

$$A_{AB} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$



- 点电荷电场中, 静电场力做功与路径无关, 仅与始末位置有关.

2. 任意电场

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

$$A = q_0 \int_l \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 \int_l (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_i) \cdot d\vec{r}$$

$$= q_0 \int_l \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + q_0 \int_l \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots + q_0 \int_l \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$$

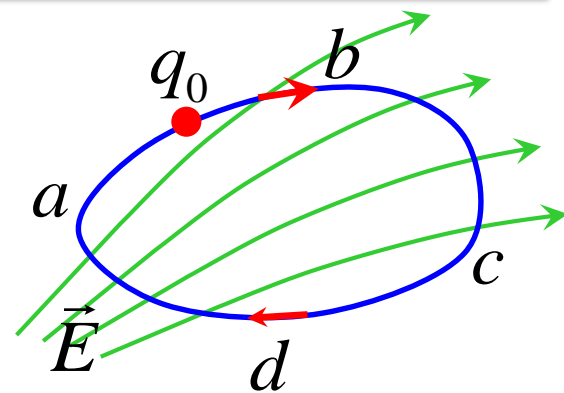
特点：任意电场中，静电场力做功与路径无关，仅与始末位置有关。

结论：静电场力是保守力，静电场是保守场。

二、静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{abcd a} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{abc} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{cda} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



➤ **静电场的环路定理：**

在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分恒等于零。

§ 7.2 电势差和电势

1. 定义

$$A_{AB} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad \frac{A_{AB}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \varphi_A - \varphi_B$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_{AB} = \frac{A_{AB}}{q_0} = -\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$$

- ◆ **电势**：静电场力对单位电荷所做的功，等于势函数 φ 在始末位置处函数值的差，**势函数 φ 称为电势**，是空间坐标(位置)的函数；电势是相对量，与电势零点的选择有关。
- ◆ **电势差**：在两点之间移动单位电荷时，静电场力所做的功，也就是势函数 φ 在两点间函数值的差；电势差是绝对量，与电势零点的选择无关。

2. 静电场做功与电荷的电势能

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_{AB} = \frac{A_{AB}}{q_0} = -\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$$

$$A_{AB} = q_0 U_{AB} = q_0 (\varphi_A - \varphi_B) = -(W_B - W_A)$$

◆ 静电场力做功：

电荷 q_0 在电场中 AB 两点之间移动时，静电场力所做的功 A_{AB} 等于电荷的电量 q_0 与两点间电势差 U_{AB} 的乘积。

$$W = q_0 \varphi$$

◆ 电荷在电场中的静电势能：

电荷 q_0 在电场中某点的静电势能 W 等于电荷 q_0 与该点电势 φ 的乘积，静电势能是相对的，与电势零点的选择有关。

3. 电势与电势差的计算

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{A_{AB}}{q_0}$$

$$A_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- ◆ **电势差**：静电场中A、B两点之间的电势差等于电场强度在两点之间的路径积分。
- ◆ **路径的选择**：由于静电场具有保守性，路径可以任意选择。

$$\varphi_B = 0, \quad \varphi_A - \varphi_B = \varphi_A$$

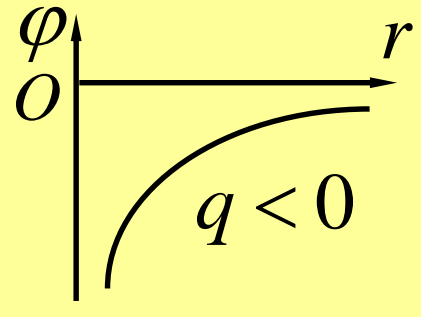
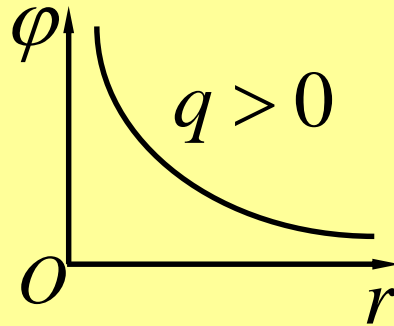
$$\varphi_A = \int_A^{\varphi=0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- ◆ **电势**：静电场中A点的电势等于电场强度从A点至电势零点之间的路径积分；也就等于将单位正电荷由A点移动至电势零点的过程中，静电场力所做的功。
- ◆ **电势零点的选择**：可以任意选择。
- ◆ **常用电势零点**：无穷远或大地。

4. 电势计算实例

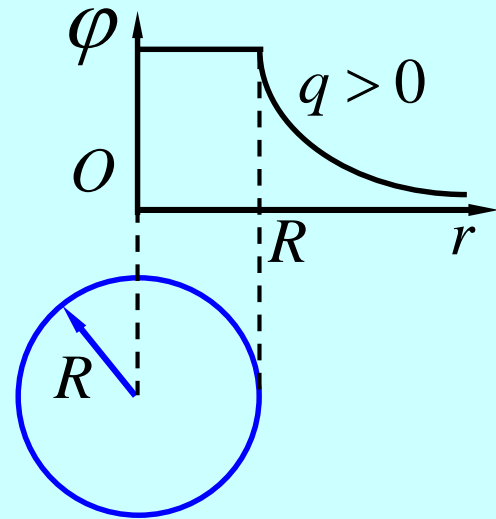
(1) 点电荷的电势 $\varphi_{\infty} = 0$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$



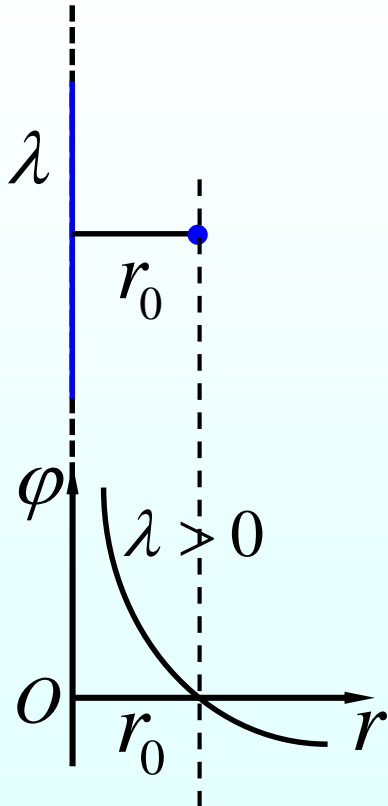
(2) 均匀带电球壳的电势 $\varphi_{\infty} = 0$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & 0 < r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & R < r < \infty \end{cases}$$



4. 电势计算实例

(3) 无限长均匀带电直线



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$\varphi_{r_0} = 0$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

§ 7.3 电势叠加原理

$$\varphi_p = \int_p^{\varphi=0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

$$\varphi_p = \int_p^{\varphi=0} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots) \cdot d\vec{l} = \int_p^{\varphi=0} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_p^{\varphi=0} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots = \sum_i \varphi_i$$

$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$

- ◆ **电势叠加原理**：一个电荷系的电场中任一点的电势等于每一个带电体单独存在时在该点所产生的电势的代数和。
- ◆ **注意**：各电势均相对于同一个电势零点。

➤ 对点电荷系：

$$\varphi = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

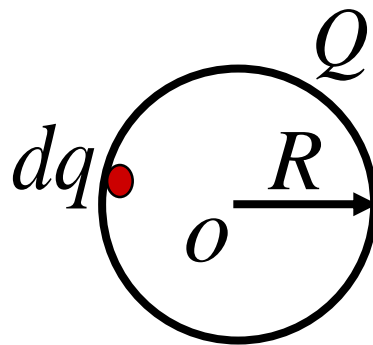
➤ 对连续电荷分布：

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

例1. 计算电量为 Q 的均匀带电球面球心处的电势.

解：在球面上任取一电荷元

则电荷元在球心的电势为 $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$



由电势叠加原理，球面上电荷在球心的总电势

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

➤ 思考：如果电量分布不均匀，结果如何？

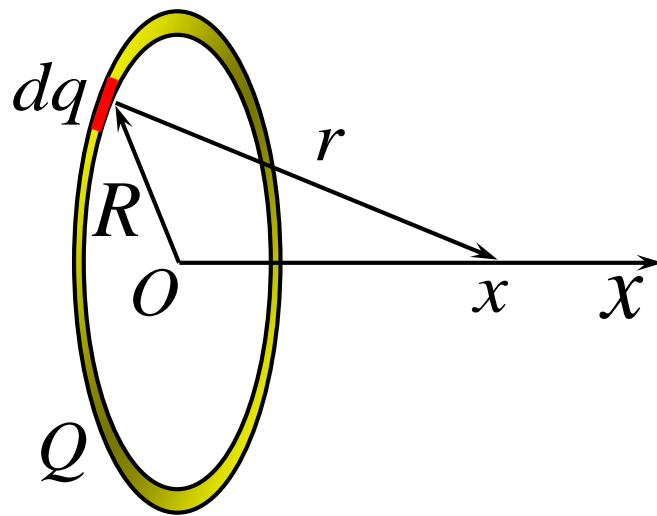
如果电荷分布在圆环或圆弧上呢？

例2. 均匀带电细圆环轴线上一点的电势.

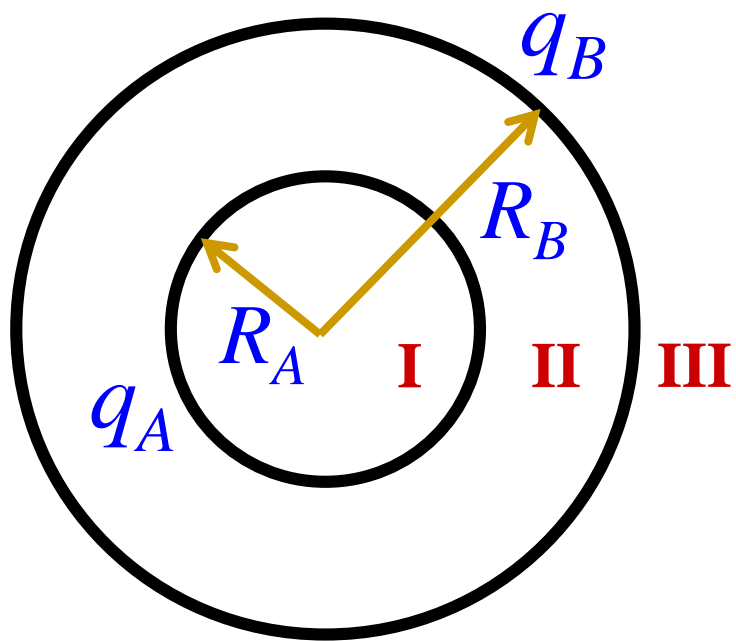
解: $\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$



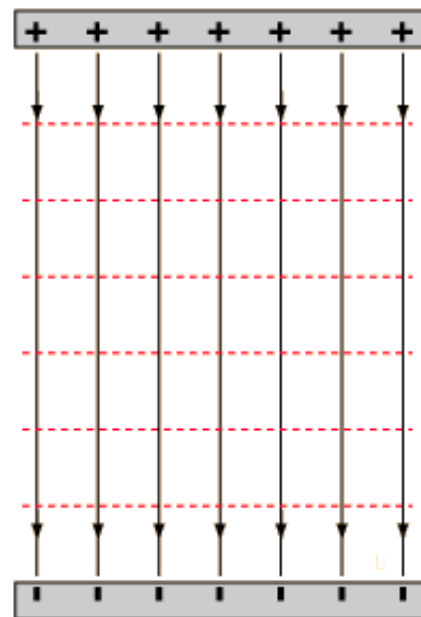
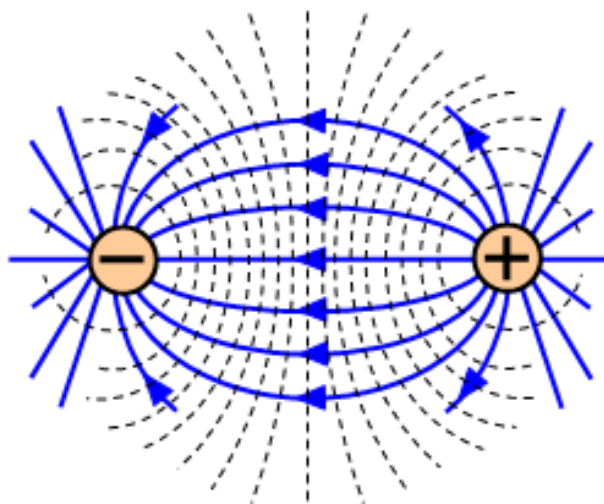
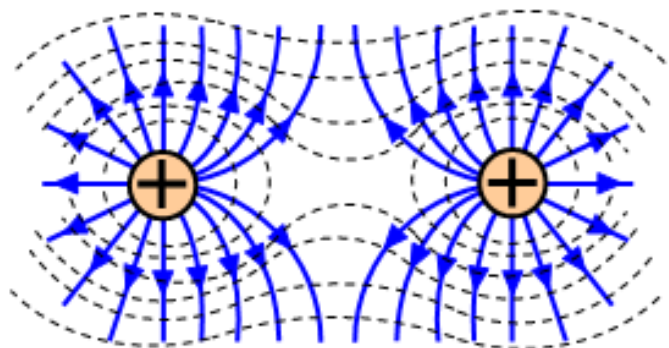
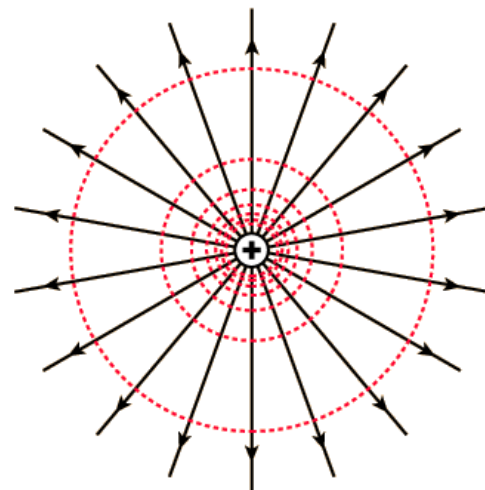
例3： 两均匀带正电的导体薄球壳（彼此绝缘），半径分别为 R_A 和 R_B ，带电量分别为 q_A 和 q_B . 求空间中的电势分布.



$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\text{I}} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B} \\ \varphi_{\text{II}} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B} \\ \varphi_{\text{III}} = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r} \end{array} \right.$$

等势面

- **定义：**在电场中电势相等的点所连成的曲面；
- **一般画法：**相邻等势面之间电势差相等。
- **在各向同性的均匀电介质中：**
 - 等势面与电场线处处正交；
 - 等势面密集处场强大，等势面稀疏处场强小。



§ 7.3 电势梯度

梯度算符

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

□ **梯度：**物理量的空间变化率，即物理量对空间坐标的偏微分——电场强度大小等于电势的空间变化率。

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\text{grad } \varphi$$

在直角坐标中： $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

例. 利用场强与电势梯度的关系，可计算均匀带电细圆环轴线上一点的场强。

解： $\varphi = \varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_y = E_z = 0$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i}$$

小结

➤ 静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

➤ 电势

$$\varphi_A = \int_A^{\varphi=0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

➤ 电势差

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

➤ 点电荷电势

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$

➤ 电势叠加原理

$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$