

笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

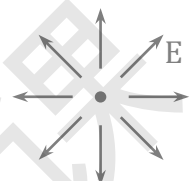
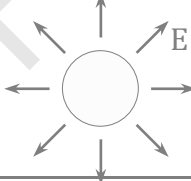
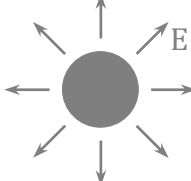
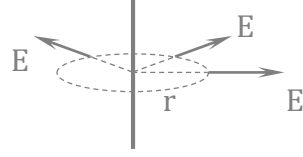
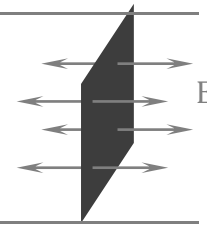
【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！！】

大物—电磁学第一课

一、利用表格求场强

表格：

场 源	距场源或场源几何中心 r 处的场强	
	大 小	方 向 (正)
带电量为 q 的点电荷	$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	
半径为 R 、带电量为 q 的均匀带电球壳	$E = \begin{cases} 0, & \text{球内} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{球外} \end{cases}$	
半径为 R 、带电量为 q 的均匀带电球体	$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & \text{球内} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{球外} \end{cases}$	
线电荷密度为 λ 的无限长均匀带电直线	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	
面电荷密度为 σ 的无限大均匀带电平面	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	

电荷量 q 的单位：C

电场强度 E 的单位：N/C

真空介电常数 ϵ_0 的单位：C²/N·m²

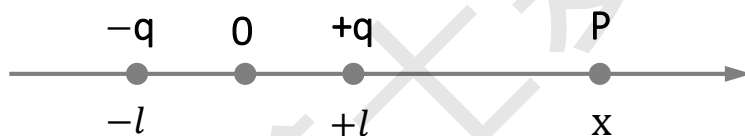
$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$

例 1：在空间中，有一个电荷量为 $+q_1$ 的点电荷，试求与点电荷距离为 a 的地方的场强大小。

$$\begin{aligned}\text{解： } E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2}\end{aligned}$$

二、利用叠加求场强

例 1：如图所示 Ox 轴，在坐标 $-l$ 处有一个点电荷 $-q$ ，在坐标 $+l$ 处有另一个点电荷 $+q$ ，在坐标 $x \gg l$ 处，取 P 点，求 P 点场强 E 。



$-q$ 在 P 点产生水平向左的场强，大小记作 $E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x+l)^2}$

$+q$ 在 P 点产生水平向右的场强，大小记作 $E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x-l)^2}$

$$\begin{aligned}E &= E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x-l)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x+l)^2} \\ &= \frac{q[(x+l)^2 - (x-l)^2]}{4\pi\epsilon_0 (x-l)^2 (x+l)^2} \\ &= \frac{q \cdot 4xl}{4\pi\epsilon_0 (x-l)^2 (x+l)^2} \\ &\approx \frac{q \cdot 4xl}{4\pi\epsilon_0 \cdot x^4} \\ &= \frac{ql}{\pi\epsilon_0 x^3}\end{aligned}$$

方向水平向右

例 2：如图，两块平行的无限大均匀带电平面铅直放置，其面电荷密度分别为 $\sigma_1=+\sigma$ 和 $\sigma_2=-\sigma$ ，求 I、II、III 三个区域的场强的大小、方向。

$$\sigma_1 \text{ 面产生的场强大小为 } E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

方向如图所示

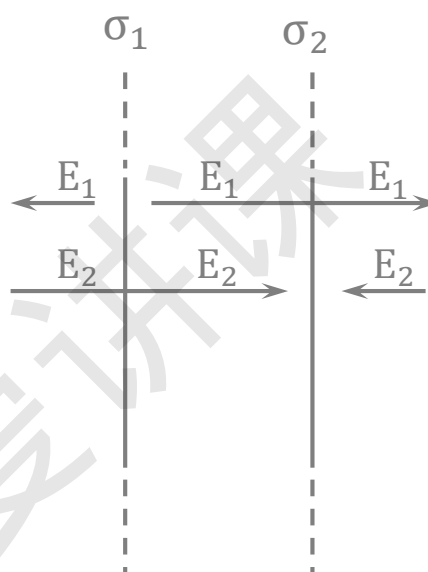
$$\sigma_2 \text{ 面产生的场强大小为 } E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

方向如图所示

$$\text{在 I 区: } E_I = E_1 - E_2 = 0$$

$$\text{在 II 区: } E_{II} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \text{ 方向水平向右}$$

$$\text{在 III 区: } E_{III} = E_1 - E_2 = 0$$



例 3：

有一半径为 r 的细圆环，环上均匀带正电，圆心 O 点处的场强的大小 $E = \underline{0}$ 。

有一半径为 r 的球壳，壳上均匀带正电，球心 O 点处的场强的大小 $E = \underline{0}$ 。

有一边长为 l 的正方形线框，线框上均匀带正电，正方形中心 O 点处的场强的大小 $E = \underline{0}$ 。

例 4：如图，半径为 R 的细圆环有一微小缺口，缺口宽度为 $d \ll R$ 。环上均匀带正电，总电量为 q 。求圆心 O 处的场强大小和方向。

圆环+缺口： $E_O = 0$

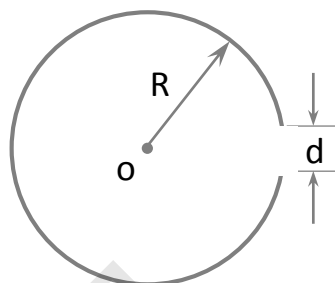
缺口部分：大小为 $E_1 = \frac{\frac{q}{2\pi R} \cdot d}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

$$\approx \frac{\frac{qd}{2\pi R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{qd}{8\pi^2\epsilon_0 R^3}$$

方向为从缺口指向圆心

圆环部分：大小为 $E_2 = \frac{qd}{8\pi^2\epsilon_0 R^3}$

方向为从圆心指向缺口



例 5：真空中有一均匀带电球壳，半径为 R ，带电量 $Q > 0$ 。现从球壳上挖去一很小的面积 ds (连同其上的电荷一同挖去)，其余部分电荷仍均匀分布，求挖完后球心处场强的大小和方向。

解： ds 部分：大小为 $E_1 = \frac{\frac{Q}{4\pi R^2} \cdot ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Qds}{16\pi^2\epsilon_0 R^4}$ 方向为从缺口指向球心

其余部分：大小为 $E_2 = \frac{Qds}{16\pi^2\epsilon_0 R^4}$ 方向为从球心指向缺口

大物—电磁学第二课

一、利用积分求场强

例 1: 如图, 长为 L 的带电细棒沿 x 轴放置, 线电荷密度 $\lambda = Ax$ ($A > 0$)。求: 在其右端延长线上与右端距离为 a 的 P 点处的场强大小。

$$\because \text{对于点电荷, } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

并且, 对于 dx 长小段, $q = \lambda dx = Ax dx$

该点到 P 点距离为 $L+a-x$, 即 $r = L+a-x$

$$\therefore dE = \frac{Ax dx}{4\pi\epsilon_0 (L+a-x)^2}$$

$$dE_x = \frac{Ax dx}{4\pi\epsilon_0 (L+a-x)^2}$$

$$dE_y = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore E_x &= \int_0^L \frac{Ax dx}{4\pi\epsilon_0 (L+a-x)^2} \\ &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{x}{(L+a-x)^2} dx \\ &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{a}{L+a} + \frac{L}{a} \right)\end{aligned}$$

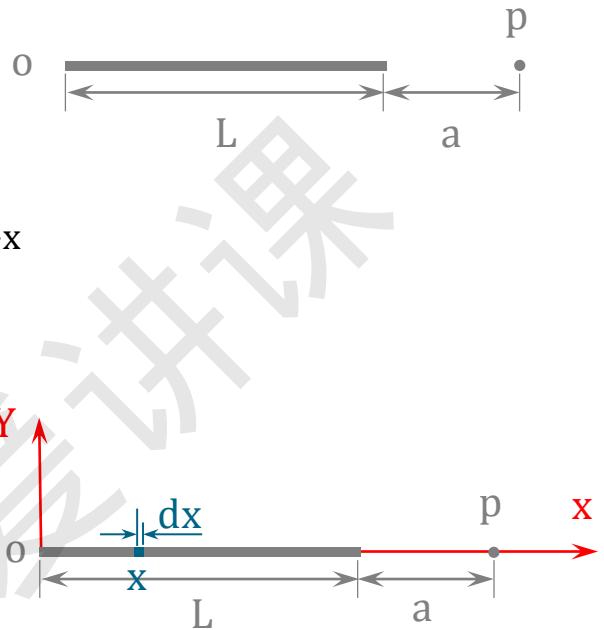
$$\therefore E_y = \int_0^L 0 dx = 0 \quad \therefore E = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{a}{L+a} + \frac{L}{a} \right)$$

积分过程:

$$\because \frac{x}{(L+a-x)^2} = \frac{x-(L+a)+(L+a)}{(L+a-x)^2} = \frac{x-(L+a)}{(L+a-x)^2} + \frac{L+a}{(L+a-x)^2} = \frac{1}{x-(L+a)} + \frac{L+a}{(L+a-x)^2}$$

$$\text{并且, } [\ln|x-(L+a)|]' = \frac{1}{x-(L+a)} \quad \left(\frac{L+a}{L+a-x}\right)' = \frac{L+a}{(L+a-x)^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^L \frac{x}{(L+a-x)^2} dx &= \int_0^L \left[\frac{1}{x-(L+a)} + \frac{L+a}{(L+a-x)^2} \right] dx \\ &= \left[\ln|x-(L+a)| + \frac{L+a}{L+a-x} \right] \Big|_0^L \\ &= \left(\ln a + \frac{L+a}{a} \right) - [\ln(L+a) + 1] \\ &= \ln \frac{a}{L+a} + \frac{L}{a}\end{aligned}$$



例 2: 无限长圆柱面的面电荷密度为 $\sigma = \sigma_0 \cos\Phi$ ($\sigma_0 > 0$)，式中 Φ 为半径 R

与 x 轴的夹角，求圆柱轴线上一点的场强。

∴ 俯视图中的点，在实际中，是一条线

并且，对于无限长直线， $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

其中， $\lambda = \sigma \cdot \text{底} = \sigma \cdot R d\Phi = \sigma_0 \cos\Phi \cdot R d\Phi$

$$r = R$$

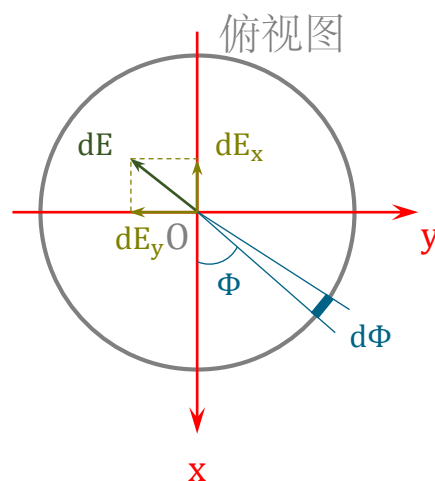
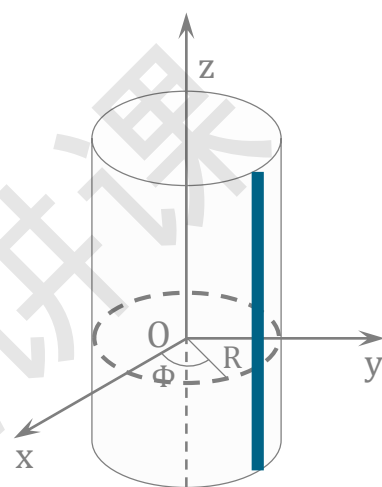
$$\therefore dE = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cos\Phi d\Phi$$

$$dE_x = -dE \cos\Phi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cos^2\Phi d\Phi$$

$$dE_y = -dE \sin\Phi = -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \sin\Phi \cos\Phi d\Phi$$

$$\begin{aligned} \therefore E_x &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cos^2\Phi \right) d\Phi \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos^2\Phi d\Phi \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\Phi + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\Phi}{2} d\Phi \right] \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\Phi}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2\Phi}{4} \Big|_0^{2\pi} \right] \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \sin\Phi \cos\Phi \right) d\Phi \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \sin\Phi \cos\Phi d\Phi \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\Phi}{2} d\Phi \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\left(-\frac{\cos 2\Phi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \right] \end{aligned}$$



$$= 0$$

$\therefore E$ 大小为 $\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$, 方向为 x 轴负方向

积分步骤: $\because \cos 2\Phi = \cos^2\Phi - \sin^2\Phi$

$$= \cos^2\Phi - (1 - \cos^2\Phi)$$

$$= 2\cos^2\Phi - 1$$

$$\therefore \cos^2\Phi = \frac{1 + \cos 2\Phi}{2}$$

$$\int \cos^2\Phi = \int \frac{1 + \cos 2\Phi}{2} = \int \frac{1}{2} + \int \frac{\cos 2\Phi}{2}$$

二、电场力/库仑力

例 1: 如图, 点电荷带电为 $+2q$, 现将另一个带电为 $+3q$ 的点电荷放在与其距离为 l 的地方, 试求出 $+2q$ 点电荷给 $+3q$ 点电荷的电场力?



$$F = Eq$$

$$E_{+2q} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

$$\therefore F = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \cdot 3q$$

$$= \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 l^2}$$

方向水平向右

例 2：如图，一半径为 R 的均匀带电球壳带有电荷 $+q$ 。一长为 l 的均匀带电细线电荷线密度为 $\lambda (\lambda > 0)$ ，沿球壳半径方向放置，左端离球心距离为 $r_0 > R$ 。

设球和线上的电荷分布不相互影响，求细线所受球壳电荷的电场力。

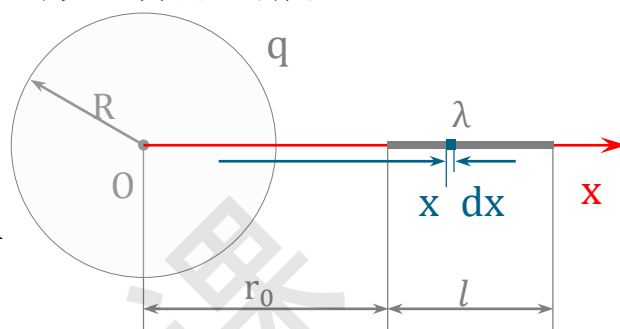
$$dq = \lambda dx$$

$$\therefore \text{球壳场强 } E = \begin{cases} 0, & \text{球内} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{球外} \end{cases} \quad \text{并且, } r_0 > R$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

$$\begin{aligned} F &= \int_{r_0}^{r_0+l} E dq = \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot \lambda dx = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{r_0}^{r_0+l} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l} \right) \\ &= \frac{q\lambda l}{4\pi\epsilon_0 r_0(r_0+l)} \end{aligned}$$

方向为水平向右



三、场强的注意点

例 1：

1、描述静电场性质的两个基本物理量是 电场强度 与 电势，

它们的定义式是 $(\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0})$ 和 $(U_{A \text{ 点}} = \int_{(A \text{ 点})}^{(\text{电势零点})} \vec{E} d\vec{l})$ 。

2、场强是矢量，既有大小又有方向

3、试验电荷是正电荷时，其所受电场力方向与场强方向相同

试验电荷是负电荷时，其所受电场力方向与场强方向相反

4、以下说法正确的是B。

(A) 电场中某点电场强度的方向，就是试验电荷在该点所受的电场力方向

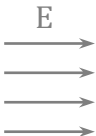
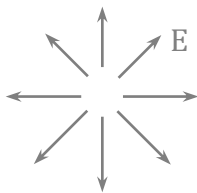
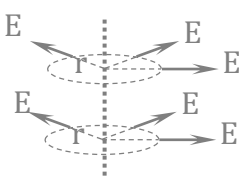
(B) 电场中某点电场强度的方向可由 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ 确定，其中 \vec{F} 为试验电荷所受的电场力， q_0 为试验电荷的电荷量， q_0 可正可负

(C) 在以点电荷为中心的球面上，由该点电荷所产生的电场强度处处相同

(D) 以上说法都不正确

大物—电磁学第三课

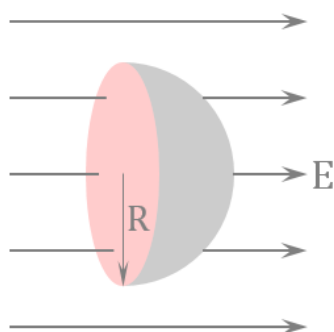
一、求通过某个面的电通量

E 的情况	电通量 Φ_e
	$\Phi_e = E \cdot S_{\perp}$ <p>若求封闭面的 Φ_e，则 E 穿出为正，反之为负</p>
	$\Phi_e = \pm E \cdot S_{\text{球}}$ <p>(E 穿出为正，反之为负)</p>
	$\Phi_e = \pm E \cdot S_{\text{圆柱面}}$ <p>(E 穿出为正，反之为负)</p>

当面与 E 平行时， $\Phi_e = 0$

当有多个面时，求各个面的电通量，再将结果相加

例 1：如图，在匀强电场 E 中，有一半径为 R 的半球面，场强 E 的方向与半球面的对称轴平行，求通过该半球面的电通量 Φ_e 。



$$S_{\perp} = \pi R^2$$

$$\Phi_e = E \cdot S_{\perp} = \pi R^2 E$$

例 2：如图，在无限大的均匀带电平面外，有一边长为 $2r$ 的正方体，正方体关于平面对称，若正方体左右表面处场强大小为 E ，试求通过该正方体表面的电通量 Φ_e 。

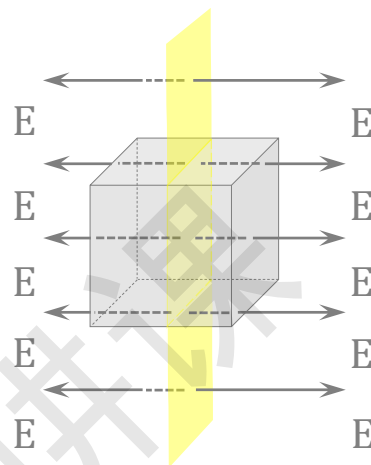
$$S_{\text{左表面}} = S_{\text{右表面}} = (2r)^2 = 4r^2$$

$$\Phi_{e\text{左表面}} = E \cdot S_{\perp} = E \cdot S_{\text{左表面}} = 4r^2 E$$

$$\Phi_{e\text{右表面}} = E \cdot S_{\perp} = E \cdot S_{\text{右表面}} = 4r^2 E$$

$$\Phi_{e\text{其他表面}} = 0$$

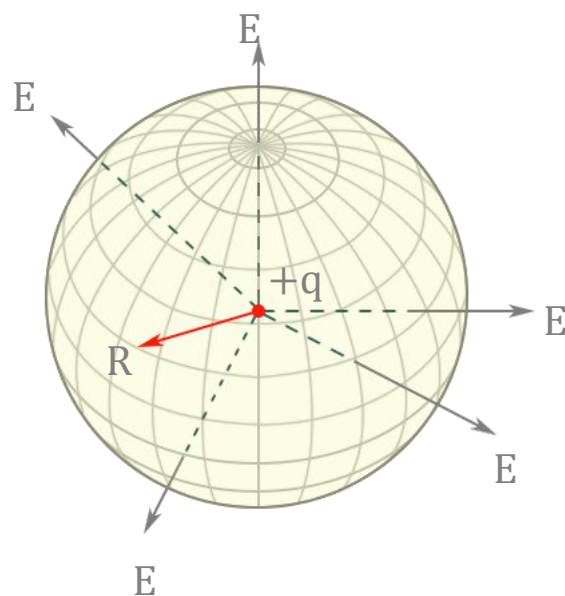
$$\Phi_e = \Phi_{e\text{左表面}} + \Phi_{e\text{右表面}} + \Phi_{e\text{其他表面}} = 8r^2 E$$



例 3：如图，一正点电荷 q 位于某球面中心，球面半径为 R ，若球面各处场强大小为 E ，试求通过球面的电通量 Φ_e 。

$$S_{\text{球}} = 4\pi R^2$$

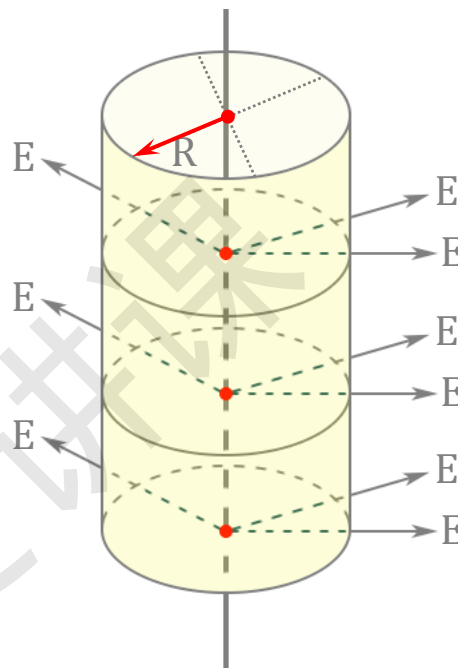
$$\Phi_e = E \cdot S_{\text{球}} = 4\pi R^2 \cdot E$$



例 4：有一带正电的无限长均匀带电直线，直线外，有一个中轴线与直线重合的圆柱面，圆柱面半径为 R ，高为 h ，若在圆柱面各处，场强大小均为 E ，求通过该圆柱体表面的电通量 Φ_e 。

$$S_{\text{圆柱面}} = 2\pi Rh$$

$$\Phi_e = E \cdot S_{\text{圆柱面}} = 2\pi Rh \cdot E$$



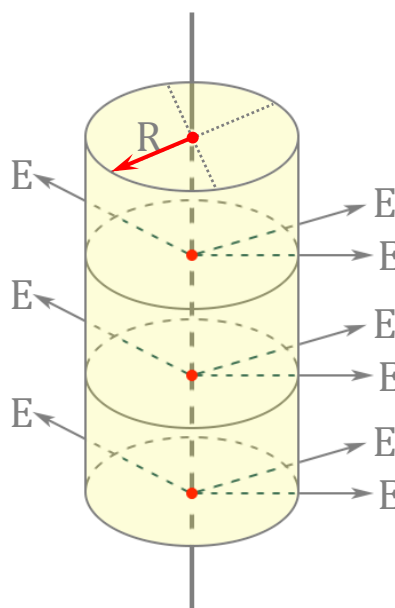
例 5：有一带正电的无限长均匀带电直线，直线外，有一个中轴线与直线重合的圆柱体，圆柱体半径为 R ，高为 h ，若在圆柱面各处，场强大小均为 E ，求通过该圆柱体表面的电通量 Φ_e 。

$$S_{\text{圆柱面}} = 2\pi Rh$$

$$\Phi_{e\text{圆柱面}} = E \cdot S_{\text{圆柱面}} = 2\pi Rh \cdot E$$

$$\Phi_{e\text{上表面}} = \Phi_{e\text{下表面}} = 0$$

$$\Phi_e = \Phi_{e\text{圆柱面}} + \Phi_{e\text{上表面}} + \Phi_{e\text{下表面}}$$



$$=2\pi Rh \cdot E$$

例 6：有一带正电的无限长均匀带电直线，直线外，有一个高为 h 的长方体。直线穿过了长方体上下表面对角线的交点，并且，交点到顶点距离为 R ，若在顶点处，场强大小为 E ，求通过该长方体表面的电通量 Φ_e 。

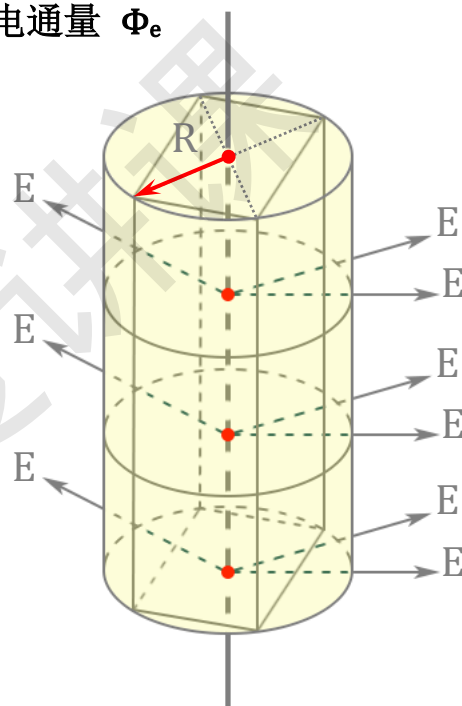
解： $S_{\text{圆柱面}} = 2\pi Rh$

$$\Phi_{e\text{圆柱面}} = E \cdot S_{\text{圆柱面}} = 2\pi Rh \cdot E$$

$$\Phi_{e\text{上表面}} = \Phi_{e\text{下表面}} = 0$$

$$\Phi_e = \Phi_{e\text{圆柱面}} + \Phi_{e\text{上表面}} + \Phi_{e\text{下表面}}$$

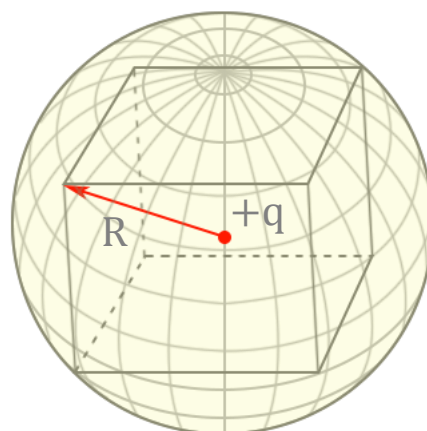
$$= 2\pi Rh \cdot E$$



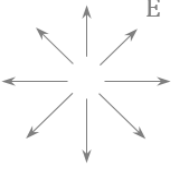
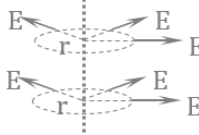
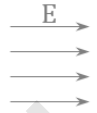
例 7：如图，一正点电荷 q 位于某正方体中心，中心到顶点距离为 R ，试求通过正方体表面的电通量 Φ_e 。

解： $S_{\text{球}} = 4\pi R^2$

$$\Phi_e = E \cdot S_{\text{球}} = 4\pi R^2 \cdot E$$



二、用高斯定理 $\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$ 求场强

场 源		E方 向	封闭曲面
球型	点电荷		球体
	带电球壳		
	带电球体		
无限长圆柱	无限长带电直线		圆柱体
	无限长带电圆柱环		
	无限长带电圆柱体		
无限大均匀带电平面			长方体

例 1：已知无限长均匀带电直线的线电荷密度为 λ ，竖直放置，求该带电直线的电场分布。

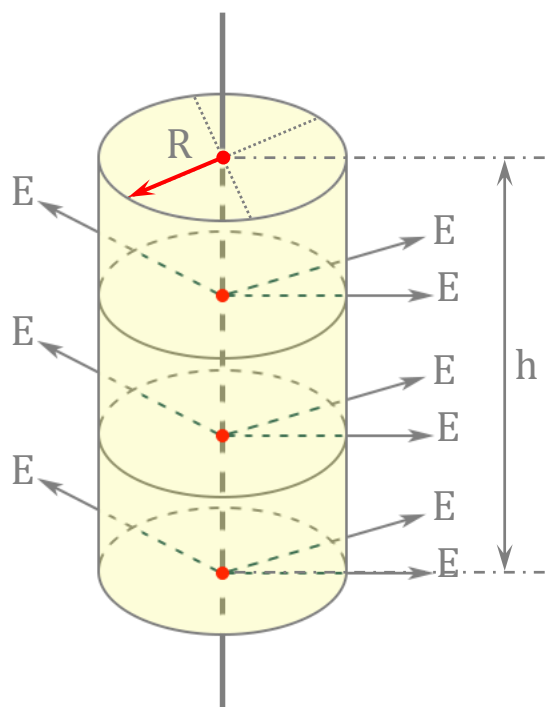
解： $\Phi_e = 2\pi R h \cdot E$

$$\sum q_{\text{内}} = \lambda h$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$2\pi R h \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \lambda h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$



例 2：已知无限长均匀带电圆筒的面电荷密度为 σ ，半径为 r ，竖直放置，

求各点的场强 E 与距轴线的距离 R 的关系。

解：

筒外： $\Phi_e = 2\pi R h \cdot E$

$$\sum q_{\text{内}} = \sigma \cdot 2\pi r h$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$2\pi R h \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot 2\pi r h$$

$$E = \frac{\sigma r}{\epsilon_0 R}$$

筒内： $\Phi_e = 0$

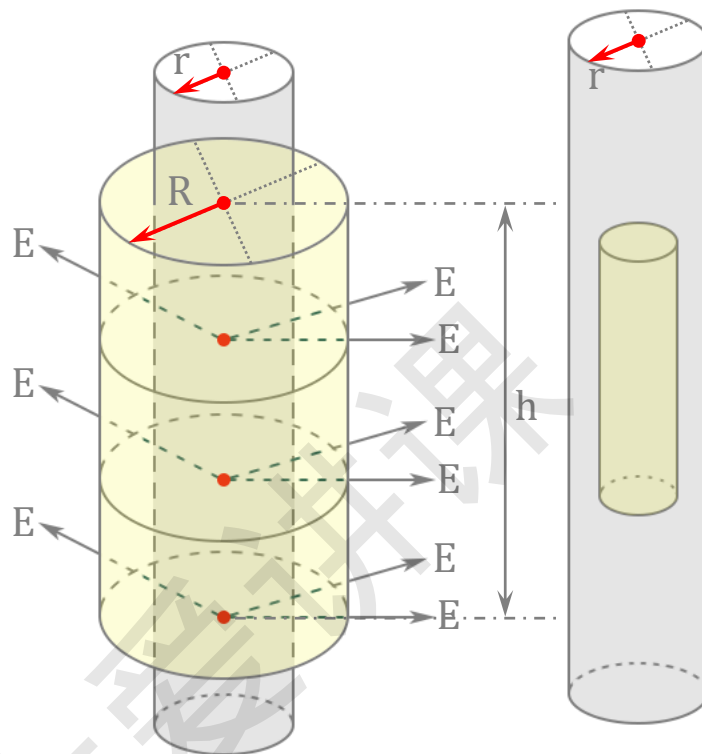
$$\sum q_{\text{内}} = 0$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$E \cdot S = 0$$

$$E = 0$$

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma r}{\epsilon_0 R}, & \text{筒外} \\ 0, & \text{筒内} \end{cases}$$



例 3：如图有一正点电荷 q ，求 q 的电场分布

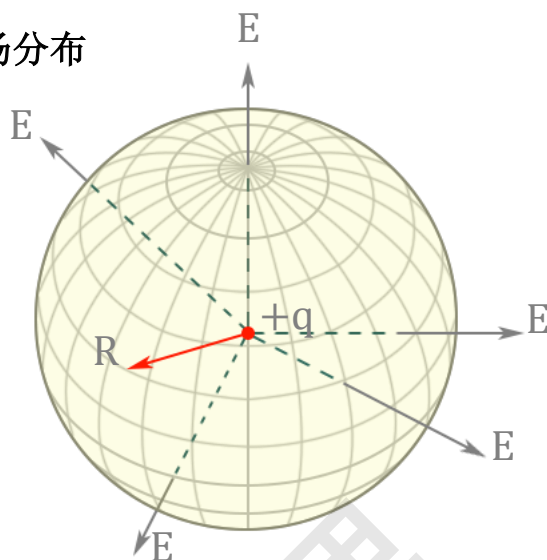
$$\Phi_e = 4\pi R^2 \cdot E$$

$$\sum q_{\text{内}} = q$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$4\pi R^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$



例 4：有一半径为 r 、带电量为 q 的均匀带电球壳，求各点的场强 E 与距球壳

中心的距离 R 的关系

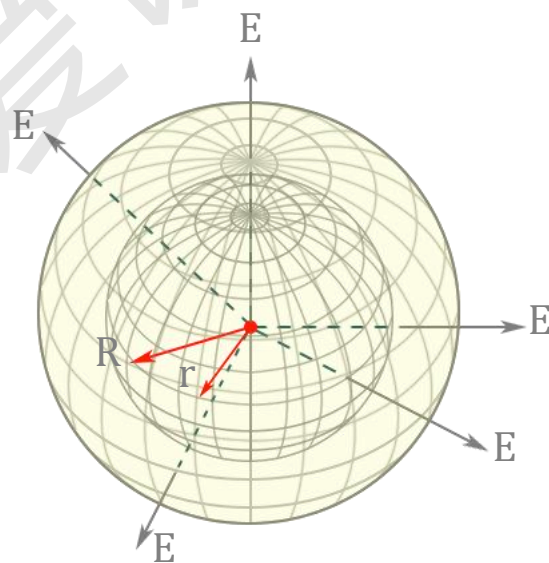
球壳外： $\Phi_e = 4\pi R^2 \cdot E$

$$\sum q_{\text{内}} = q$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$4\pi R^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$



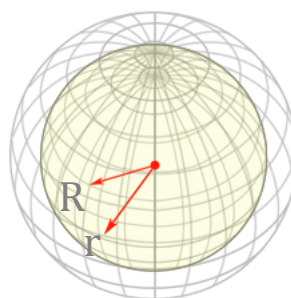
球壳内： $\Phi_e = 0$

$$\sum q_{\text{内}} = 0$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

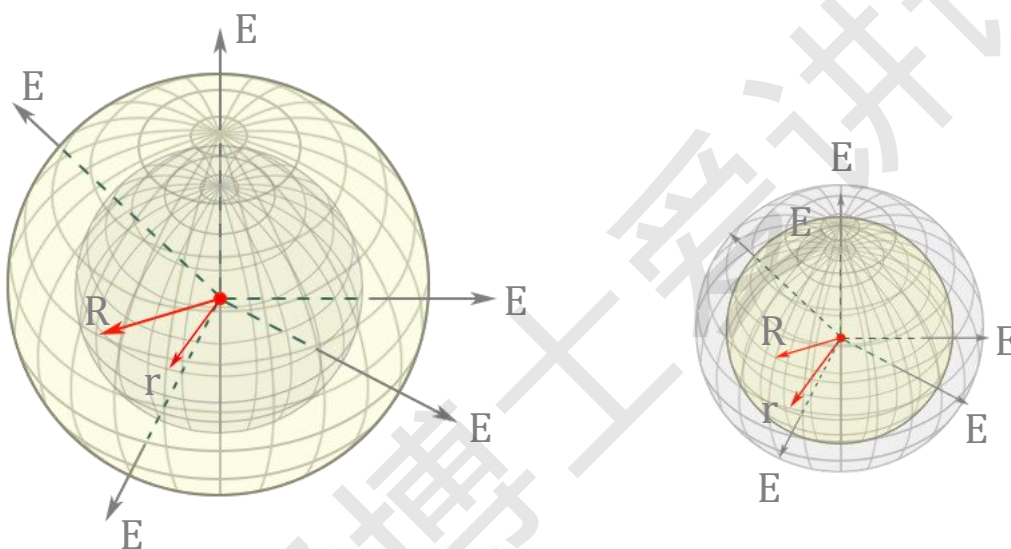
$$E \cdot S = 0$$

$$E = 0$$



$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, & \text{球壳外} \\ 0 & \text{球壳内} \end{cases}$$

例 5：有一半径为 r 、带电量为 q 的均匀带电球体，求各点的场强 E 与距球体中心的距离 R 的关系



球体外： $\Phi_e = 4\pi R^2 \cdot E$

球体内： $\Phi_e = 4\pi R^2 \cdot E$

$$\sum q_{\text{内}} = q$$

$$\sum q_{\text{内}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot q = \frac{R^3}{r^3} \cdot q$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$4\pi R^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q$$

$$4\pi R^2 \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot R$$

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, & \text{球体外} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} R, & \text{球体内} \end{cases}$$

例 6：已知无限大均匀带电平面的面电荷密度为 σ ，竖直放置，求该带电平面的电场分布。

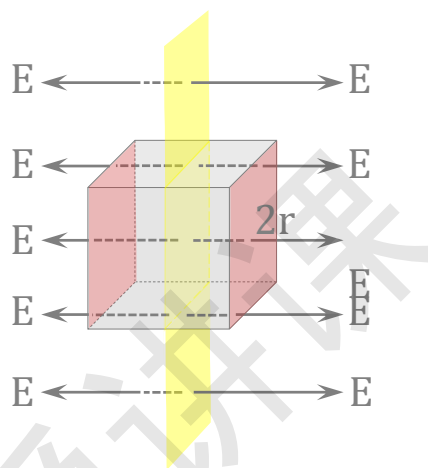
$$\Phi_e = 8r^2 E$$

$$\sum q_{\text{内}} = \sigma \cdot (2r)^2 = 4r^2 \cdot \sigma$$

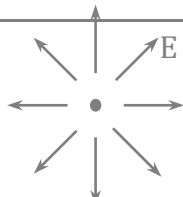
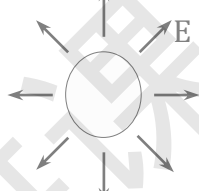
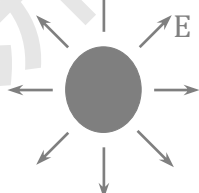
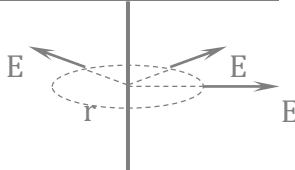
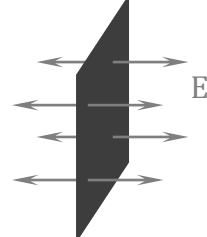
$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$8r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 4r^2 \cdot \sigma$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



表格:

场 源	距场源或场源几何中心 r 处的场强	
	大 小	方 向
带电量为 q 的点电荷	$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	
半径为 R 、带电量为 q 的 均匀带电球壳	$E = \begin{cases} 0, & \text{球内} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{球外} \end{cases}$	
半径为 R 、带电量为 q 的 均匀带电球体	$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & \text{球内} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{球外} \end{cases}$	
线电荷密度为 λ 的 无限长均匀带电直线	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	
面电荷密度为 σ 的 无限大均匀带电平面	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	

电荷量 q 的单位: C

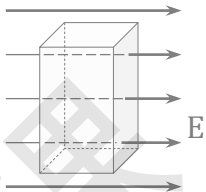
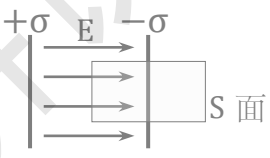
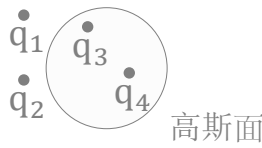
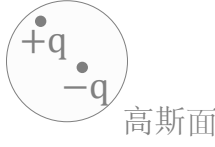
电场强度 E 的单位: N/C

真空介电常数 ϵ_0 的单位: $C^2/N \cdot m^2$

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$

三、电通量、高斯定理注意点

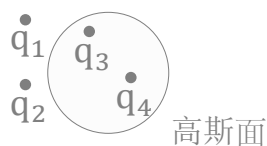
表格：

	注意点	例子
电通量	E 处处为零可以推出 $\Phi_e=0$	
	$\Phi_e=0$ 不能推出 E 处处为零	
	E 不全为零不能推出 $\Phi_e \neq 0$	
	$\Phi_e \neq 0$ 不能推出 E 处处不为零	
$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 或 $\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$		
高斯定理	只要曲面闭合，就可以充当高斯面	
	Φ_e 是由全部电荷共同产生的，并非只由高斯面内的电荷所产生	
	$\Phi_e=0$ 只能说明 $\sum q_{\text{内}}=0$ ，不能说明高斯面内没有电荷	

例 1：点电荷 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 在真空中的分布如图所示，图中 S 为闭合曲面，

则通过该闭合面的电通量 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_3 + q_4}{\epsilon_0}$ ，式中的 E 是点电荷 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4

在闭合面上各点的场强的矢量和。



例 2：下列说法正确的是 B

(A) 闭合曲面上各点场强都为零时，

面内一定没有电荷

(B) 闭合曲面上各点场强都为零时，

面内电荷的代数和必为零

(C) 闭合曲面的电通量为零时，

面上任意一点的场强都是零

(D) 闭合曲面的电通量不为零时，

面上任意一点的场强都不为零

大物—电磁学第四课

一、用电介质中的高斯定理求场强

例 1: 如图, 一半径为 R 的金属球均匀带正电, 电量为 q , 浸在大油箱中, 油相对介电常数为 ϵ_r 。求球外场强。

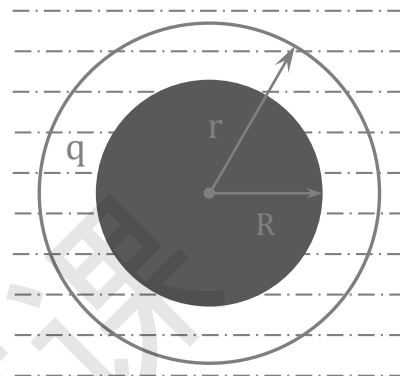
$$\text{球外: } \epsilon_r \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_r E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Sigma q_{\text{内}} = q$$

$$\epsilon_r \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q_{\text{内}}$$

$$\epsilon_r E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$



二、求极化电荷/束缚电荷

例 1: 如图, 一半径为 R 的金属球均匀带正电, 电量为 q , 浸在大油箱中, 油相对介电常数为 ϵ_r 。求贴近金属球表面的油面上的极化电荷总量 $q_{\text{极化}}$

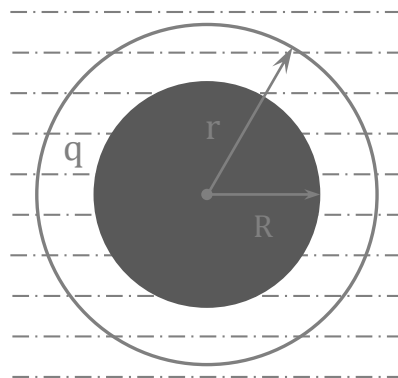
$$\text{解: } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

$$\text{拿走电介质: } E_{\text{无介质}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_{\text{极化}} = \frac{q_{\text{极化}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = E_{\text{无介质}} + E_{\text{极化}}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q_{\text{极化}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow q_{\text{极化}} = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right)q$$



三、电介质中高斯定理注意点

例 1:

① 静电场的高斯定理有两种形式: $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum q$, 其中 q 指的是高斯面 S 内的自由电荷; $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$, 其中 q 指的是高斯面 S 内的所有电荷, 在电介质中, q 包括自由电荷和极化电荷两部分。

② 电介质中的电位移 \mathbf{D} 与自由电荷和极化电荷的分布有关

③ 电介质充满整个电场且自由电荷的分布不发生变化时, 电介质中场强等于没有电介质时该点场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍。

例 2: 根据电介质中的高斯定理, 下列说法正确的是 C。

(A) 若电位移沿一个闭合曲面的积分等于零, 则曲面内一定没有自由电荷

(B) 若电位移沿一个闭合曲面的积分等于零, 则曲面内电荷的代数和一定等于零

(C) 电介质中的电位移与自由电荷和极化电荷的分布有关

例 3：对于各向同性的均匀电介质，下列说法正确的是 A。

(A) 电介质充满整个电场且自由电荷的分布不发生变化时，电介质中场强等于没有电介质时该点场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍

(B) 电介质充满整个电场时，电介质中场强等于没有电介质时该点场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍

(C) 电介质中场强等于没有电介质时该点场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍

四、静电场的能量/静电能

例 1：空气中有均匀带电球体，半径为 R ，带电量为 Q 。请计算该球体在整个空间内的静电能。

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases} \quad (r \text{ 为距球心的距离})$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned} W &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\epsilon_r Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr + \frac{\epsilon_r Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{\epsilon_r Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^{r=R} + \frac{\epsilon_r Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R}^{r=\infty} \\ &= \frac{\epsilon_r Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \cdot \left(\frac{R^5}{5} - 0 \right) + \frac{\epsilon_r Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left(0 + \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{\epsilon_r Q^2}{40\pi\epsilon_0 R} + \frac{\epsilon_r Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{3\epsilon_r Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

例 2：真空中有一均匀带电球体和一均匀带电球壳，二者的半径和带电量都相等。

请证明球体的静电能大于球壳的静电能。

解：设二者的半径为 R ，带电量为 Q ，则

$$\text{球体的场强 } E_{\text{体}} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases}$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

球体的静电能：

$$\begin{aligned} W_{\text{体}} &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{体}}^2 dV \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{体}}^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

$$\text{球壳的场强 } E_{\text{壳}} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases}$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

球壳的静电能：

$$\begin{aligned} W_{\text{壳}} &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{壳}}^2 dV \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{壳}}^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= 0 + \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

很显然 $W_{\text{体}} > W_{\text{壳}}$

大物—电磁学第五课

一、根据场强求电势

例 1: 空间中有一带电量为 q 的点电荷, 试求与其距离为 r 处的电势。

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{无穷远处是电势零点}$$

$$U = \int_{\text{待求点的 } r \text{ 值}}^{\text{电势零点的 } r \text{ 值}} E \cdot dr$$

$$= \int_r^{+\infty} E \cdot dr$$

$$= \int_r^{+\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^{+\infty}$$

$$= 0 - \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

二、电势差/电压

例 1: 如图, 一无限长均匀带电直线电荷密度为 λ , Ox 轴与该直线垂直,

A、B 两点与直线相距为 r_A 、 r_B 。请计算 A、B 两点的电势差 $U_A - U_B$ 。

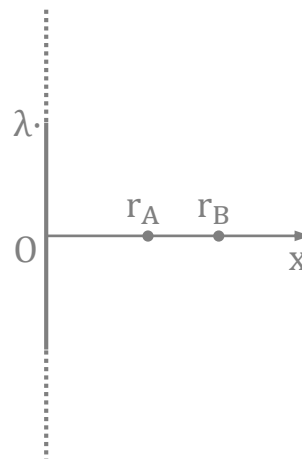
$$\text{场强 } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_A - U_B = \int_{A \text{ 点的 } r \text{ 值}}^{B \text{ 点的 } r \text{ 值}} E \cdot dr$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_B - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_A$$



例 2：如图，一点电荷 $q=10^{-9}\text{C}$ 。A、B 三点分别与点电荷 q 相距 10cm、20cm。若选 B 点电势为零，求 A 点电势。



$$\text{场强 } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$U_{AB} = \int_{\text{A 点的 } r \text{ 值}}^{\text{B 点的 } r \text{ 值}} E \cdot dr$$

$$= \int_{0.1}^{0.2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{0.1}^{0.2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0.1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0.2}$$

$$= \frac{10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.1} - \frac{10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.2}$$

$$= 45\text{V}$$

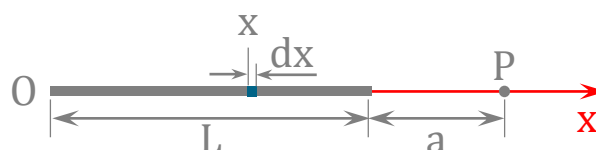
$$\left. \begin{array}{l} U_{AB} = U_A - U_B = 45\text{V} \\ U_B = 0\text{V} \end{array} \right\} \Rightarrow U_A = 45\text{V}$$

三、取电荷元求电势

例 3：如图，长为 L 的带电细棒沿 x 轴放置，线电荷密度 $\lambda = Ax$ (A 为常量)。
求：在其右端延长线上与右端距离为 a 的 P 点处的电势。

$$dq = \lambda \cdot dx = Ax dx$$

$$r_{\text{待求点}} = L + a - x$$



以无穷远处为电势零点

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r \text{ 待求点}}$$

$$= \frac{Axdx}{4\pi\epsilon_0(L+a-x)}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L dU = \int_0^L \frac{Axdx}{4\pi\epsilon_0(L+a-x)} \\ &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{x}{L+a-x} dx \\ &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \left[-L + (L+a) \ln \frac{L+a}{a} \right] \end{aligned}$$

积分过程: $\because \frac{x}{L+a-x} = \frac{x-a-L+a+L}{L+a-x} = \frac{x-a-L}{L+a-x} + \frac{a+L}{L+a-x} = -1 + \frac{a+L}{L+a-x}$

并且, $(-x)' = -1$, $[-(a+L) \ln|x-(L+a)|]' = \frac{a+L}{L+a-x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^L \frac{x}{L+a-x} dx &= \int_0^L \left[-1 + \frac{a+L}{L+a-x} \right] dx \\ &= [-x - (a+L) \ln|x-(L+a)|] \Big|_0^L \\ &= [-L - (a+L) \ln|L-(L+a)|] - \\ &\quad [-(a+L) \ln|-(L+a)|] \\ &= -L - (a+L) \ln a + (a+L) \ln(L+a) \\ &= -L + (a+L) [\ln(L+a) - \ln a] \\ &= -L + (L+a) \ln \frac{L+a}{a} \end{aligned}$$

四、电势/电势差的注意点

例 1：述静电场性质的两个基本物理量是电场强度与电势，它们的定义式

是 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ 和 $U_{A \text{ 点}} = \int_{(A \text{ 点})}^{(\text{电势零点})} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 。

- ① 电势会沿着电场线的方向变小
- ② 一点的电势不是一成不变的，会随电势零点的变化而变化
- ③ 无论电势零点选在哪里，两点间的电势差是不变的

④ 场强是电势的微分
$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

例 2：请判断下列说法的正误。

- (1) 电势为零处，场强也一定为零。.....(✖)
- (2) 场强为零处，电势也一定为零。.....(✖)
- (3) 电势较高处，场强一定较大。.....(✖)
- (4) 场强较小处，电势一定较低。.....(✖)
- (5) 带正电的物体电势一定为正，带负电的物体电势一定为负。(✖)
- (6) 场强相等的区域，电势也处处相等。.....(✖)

例 3：空间某区域的电势分布为 $U=Ax^2+By^2$ ，其中 A、B 为常数，则场强

分布为 $E_x=$ _____， $E_y=$ _____。

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial(Ax^2+By^2)}{\partial x} = -2Ax$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial(Ax^2+By^2)}{\partial y} = -2By$$

五、电势能

例 1：如图，一半径为 R 的均匀带电球壳带有电荷 q 。一长为 l 的均匀带电细线电荷线密度为 λ ，沿球壳半径方向放置，左端离球心距离为 $r_0 > R$ 。设球和线上的电荷分布不相互影响，求细线在该电场中的电势能 (设无穷远处电势为零)。

$$dq = \lambda dx$$

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

$$W = \int U dq$$

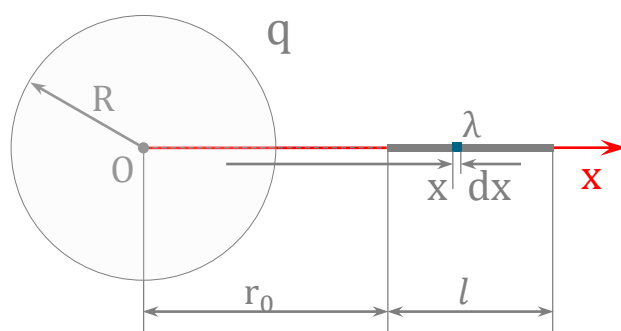
$$= \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \cdot \lambda dx$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln x \Big|_{r_0}^{r_0+l}$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot [\ln(r_0 + l) - \ln r_0]$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0+l}{r_0}$$



六、电场力对位移的电荷做功

例 1: 如图, 点电荷 q_1 、 q_2 的带电量依次为 q 、 $-\frac{q}{4}$, 其中 q_1 固定不动。开始时 q_2 静止, 现用外力将其经任意路径缓慢地移到无穷远处, 求电场力做功。

以无穷远处为电势零点, 电势 $U = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

起点为 $r_1 = a$ 、终点为 $r_2 = \infty$

电场力做功 $A_{12} = q_2(U_{r1} - U_{r2}) = -\frac{q}{4} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - 0 \right) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}$



大物—电磁学第六课

一、静电平衡的导体

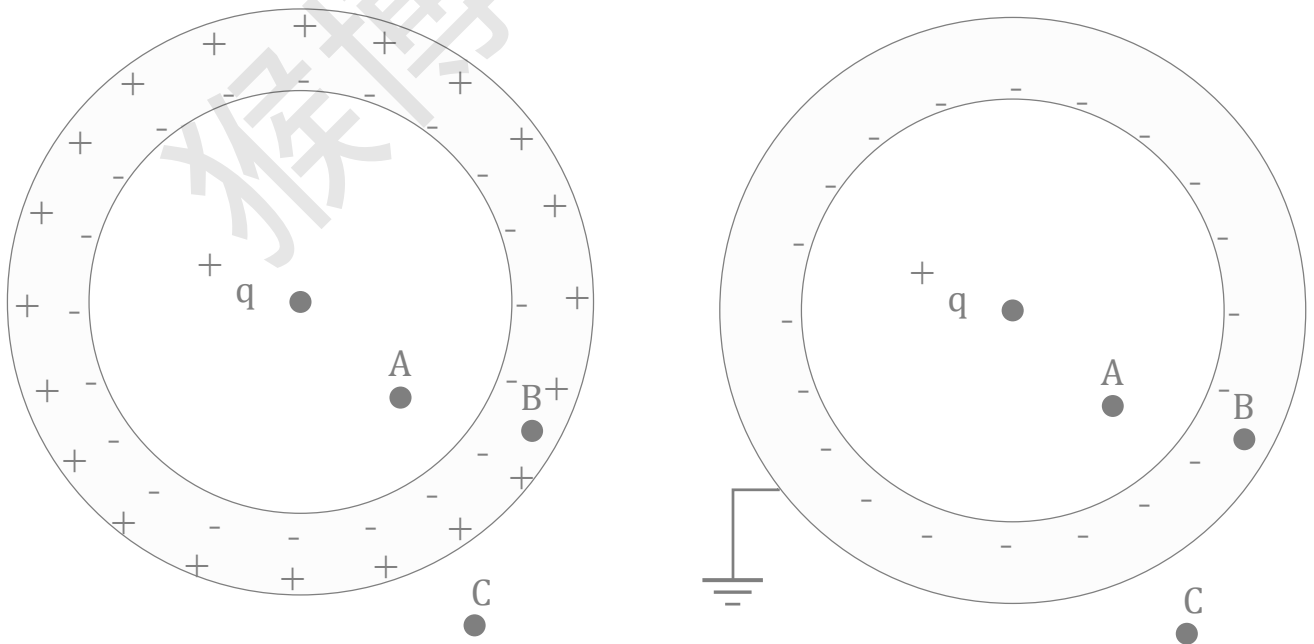
例 1:

① 若两带电体放在一起，则：

- a、带电体中的电荷都会跑到表面
- b、可以吸引另一个带电体中相反的电荷
- c、带电体除表面外的部分 $\sum q=0$
- d、带电体除表面外的部分 E 处处为 0
- e、带电体各处电势均相等

② 若带电体接地，则靠近另一带电体这侧和没接地一样，而远离另一带电体这侧变为中性(通过该侧所有电荷入地/从大地进入等量的相反电荷)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A^2} \quad E_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_C^2} \quad E_B = 0$$





例 2:

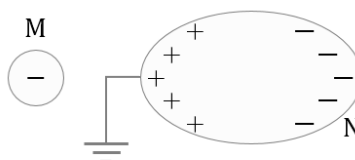
当一个带电导体达到静电平衡时，下列说法正确的是 D。

- (A) 曲率半径较小处电势较高
- (B) 表面上电荷密度较大处电势较高
- (C) 导体内部的电势比导体表面的电势高
- (D) 导体内任一点与其表面上任一点的电势差为零

例 3:

如图，将一带负电的场源 **M** 靠近一不带电的导体 **N**，在 **N** 的左侧感应出正电荷、右侧感应出负电荷。静电平衡后，再将导体 **N** 的左侧接地，则下列说法不正确的是 D。

- (A) 导体右侧变为中性
- (B) 导体右侧的所有负电荷入地
- (C) 有等量的正电荷从大地跑到了导体右侧
- (D) 以上说法都不正确



二、有静电平衡的导体，求场强

例 1: 如图，半径为 R_1 ，带电量为 q 的金属球，被一同心金属球壳包围。球壳内径为 R_2 ，外径为 R_3 ，带电量为 Q 。求距球心 r 处的场强。

$$E = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_1 \\ 0, & R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，

$$\Phi_e = E \cdot S_{\text{球}} = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\sum q_{\text{内}} = q$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由高斯定理可求出场强分布为：

$$E = \begin{cases} E_1 = 0 & 0 \leq r < R_1 \\ E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ E_3 = 0 & R_2 < r < R_3 \\ E_4 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$

当 $r > R_3$ 时，

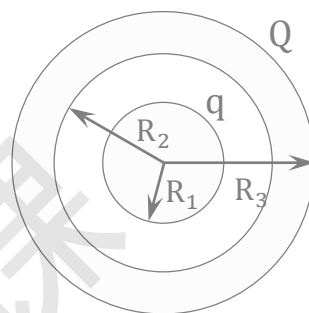
$$\Phi_e = E \cdot S_{\text{球}} = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\sum q_{\text{内}} = Q + q$$

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + q)$$

$$E = \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

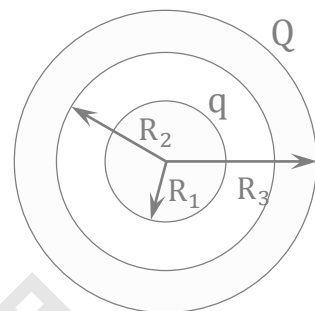


三、有静电平衡的导体，求电势

例 1: 如图, 半径为 R_1 , 带电量为 q 的金属球, 被一同心金属球壳包围。球壳内径为 R_2 , 外径为 R_3 , 带电量为 Q 。求距球心 r 处的电势。

由高斯定理可求出场强分布为:

$$E = \begin{cases} E_1 = 0 & 0 \leq r < R_1 \\ E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ E_3 = 0 & R_2 < r < R_3 \\ E_4 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$



以无穷远处为电势 0 点,

当 $r \geq R_3$ 时,

$$\begin{aligned} U &= \int_r^{+\infty} E \cdot dr \\ &= \int_r^{+\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr \\ &= - \left. \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_r^{+\infty} \\ &= \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

当 $R_2 \leq r < R_3$ 时,

$$\begin{aligned} U &= \int_r^{+\infty} E \cdot dr \\ &= \int_r^{R_3} 0 \cdot dr + \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr \\ &= 0 + \left(- \left. \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_{R_3}^{+\infty} \right) \\ &= \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \end{aligned}$$

当 $R_1 \leq r < R_2$ 时,

$$\begin{aligned} U &= \int_r^{+\infty} E \cdot dr \\ &= \int_r^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr + \int_{R_2}^{R_3} 0 \cdot dr + \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr \end{aligned}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{R_2}^{R_1} + 0 + \left(-\frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{R_3}^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

当 $0 \leq r < R_1$ 时,

$$U = \int_r^{+\infty} E \cdot dr$$

$$= \int_0^{R_1} 0 \cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr + \int_{R_2}^{R_3} 0 \cdot dr + \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr$$

$$= 0 + \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{R_1}^{R_2}\right) + 0 + \left(-\frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{R_3}^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$U = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} & 0 \leq r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} & R_2 \leq r < R_3 \\ \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq R_3 \end{cases}$$

大物—电磁学第七课

一、平行板电容器

例 1：有一空气平行板电容器，电容为 C ，两极板间距为 d ，充满电后两极板间的相互作用力为 F ，则两极板间的电压以及正极板带电量是多少。

$$E = \frac{2F}{Q} = \frac{2F}{CU}$$

$$U = Ed = \frac{2F}{CU}d$$

$$\Rightarrow U^2 = \frac{2Fd}{C}$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{\frac{2Fd}{C}}$$

$$Q = CU = \sqrt{2FdC}$$

例 2：电容式电脑键盘的按键下有一小块金属片，金属片与底板上的另一金属片构成一空气电容器。按下按键时电容发生变化，进而向电脑发出按键信号。

两金属片间距为 0.6mm ，一片面积为 50mm^2 ，电脑能检测出的电容变化量是 0.25pF ，问按键至少按下多大的距离才有效？

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 50 \times 10^{-6}}{d}$$

$$C_{\text{初始}} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 50 \times 10^{-6}}{0.6 \times 10^{-3}}$$

设按下距离至少为 d 才有效

$$C_{\text{按下}} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 50 \times 10^{-6}}{0.6 \times 10^{-3} - d}$$

$$C_{\text{按下}} - C_{\text{初始}} = 0.25 \times 10^{-12}$$

$$0.25 \times 10^{-12} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 50 \times 10^{-6}}{0.6 \times 10^{-3} - d} - \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 50 \times 10^{-6}}{0.6 \times 10^{-3}}$$

$$d = 0.152 \text{ mm}$$

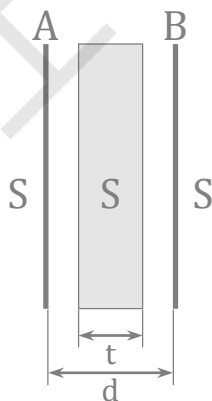
二、平行板电容器中部分区域有金属板或介质，且板面或介质面与电容器面平行，求总电容

例 1：一空气平行板电容的两极板面积均为 S ，两板的间距为 d ，在两板间平行地插入一面积也是 S 、厚度为 t 的金属片 ($t < d$)，请问电容 C 是多少？

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} + \dots + \frac{d_n}{\epsilon_{rn}}}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d-t}{1} + \frac{t}{+\infty}}$$

$$= \frac{\epsilon_0 S}{d-t}$$

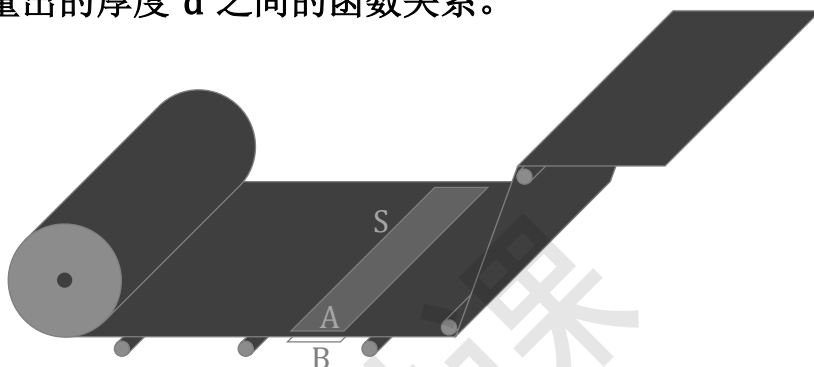


例 2：为测量纸张 (可视为相对介电常数为 ϵ_r 的电介质) 的厚度，生产流水线上需安装如图所示的平行板电容器，A 板、B 板的面积为 S ，间距为 d_0 。求直接测量出的电容值 C 与间接测量出的厚度 d 之间的函数关系。

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} + \dots + \frac{d_n}{\epsilon_{rn}}}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_0 - d}{1} + \frac{d}{\epsilon_r}}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\epsilon_r (d_0 - d) + d}$$



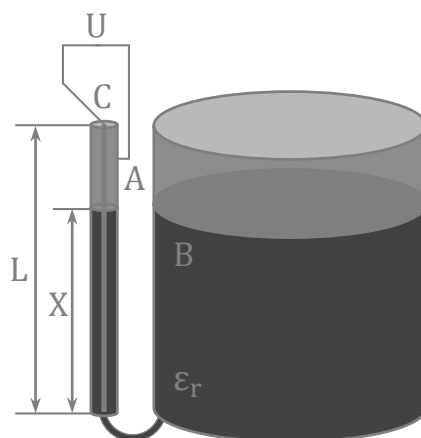
三、圆柱形电容器、球形电容器

例 1：如图，B 为储油罐，油的相对介电常数为 ϵ_r 。导体圆管 A 与油罐相连，圆管内径为 D 、高为 L ，一根外径为 d 的导体棒 C 与圆管同轴、高也是 L 。若管内液面高为 X ，试求圆管与导体棒间接上电压后，液面以下部分的电容 C_1 、以及液面以上部分的电容 C_2 。

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln \frac{D}{d}}$$

$$\text{液面以下: } C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r X}{\ln \frac{D}{d}}$$



$$\text{液面以上: } C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0(L-X)}{\ln\frac{D}{d}}$$

四、电容器内部分区域有介质，且介质面与电容器面垂直，求总电容

例 1：如图，B 为储油罐，油的相对介电常数为 ϵ_r 。导体圆管 A 与油罐相连，

圆管内径为 D、高为 L，一根外径为 d 的导体棒 C 与圆管同轴、高也是 L。当

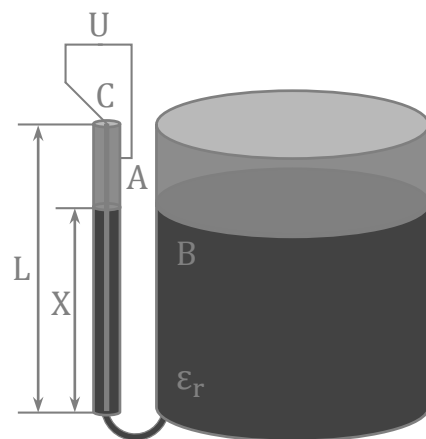
圆管与导体棒间接上电压 U 时，请求出圆管上的带电量 Q 和液面的高度 X 之间的关系。

$$\text{解：液面以下: } C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r X}{\ln\frac{D}{d}}$$

$$\text{液面以上: } C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0(L-X)}{\ln\frac{D}{d}}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r X}{\ln\frac{D}{d}} + \frac{2\pi\epsilon_0(L-X)}{\ln\frac{D}{d}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln\frac{D}{d}} + \frac{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\ln\frac{D}{d}} X$$

$$Q = CU = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r LU}{\ln\frac{D}{d}} + \frac{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r - 1)U}{\ln\frac{D}{d}} X$$



五、电容器储存的电场能

例 1：有一空气平行板电容器，电容为 C ，两极板间距为 d ，充满电后两极板间的相互作用力为 F ，则两极板间的电压、正极板带电量、电容器中储存的电场能为多少？

$$E = \frac{2F}{Q} = \frac{2F}{CU}$$

$$U = Ed = \frac{2F}{CU}d$$

$$\Rightarrow U^2 = \frac{2Fd}{C}$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{\frac{2Fd}{C}}$$

$$Q = CU = \sqrt{2FdC}$$

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2FdC} \cdot \sqrt{\frac{2Fd}{C}} = Fd$$

六、电容器两板间的位移电流

例 1：一个空气平行板电容器的两极板都是半径为 R 的圆形导体片，已知充电时两板间的电场强度变化率为 $\frac{dE}{dt}$ 。忽略边缘效应，求两板间的位移电流。

$$\begin{aligned} I_d &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{dE}{dt} S \\ &= \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

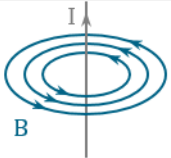


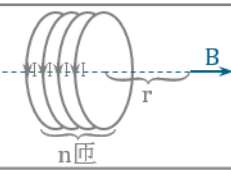
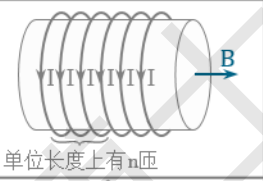
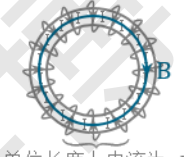
例 2：加在平行板电容器两板上的电压变化率 $\frac{dU}{dt}=1.5\times 10^5 \text{ V/s}$ ，在电容器内产生了 3A 的位移电流，求该电容器的电容量 C。

$$I_d = C \frac{dU}{dt}$$

$$C = \frac{I_d}{\frac{dU}{dt}} = \frac{3}{1.5 \times 10^5} = 2 \times 10^{-5} \text{ F}$$

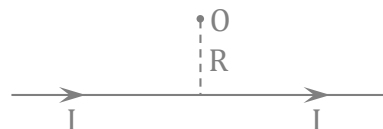
大物—电磁学第八课

一、利用表格求磁感应强度

通电元件	与圆心距离为r处的磁感应强度
无限长直导线 	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
半径为R的无限长圆筒 	$B = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R \end{cases}$
半径为R的无限长圆柱 	$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R \end{cases}$
半径为R的N匝圆形线圈 	$B = \frac{N\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + r^2)^{3/2}}$
单位长度上电流为nI的无限长直螺线管 	$B = \begin{cases} 0, & \text{管外} \\ \mu_0 n I, & \text{管内} \end{cases}$
单位长度上电流为nI的环形螺线管 	$B = \begin{cases} 0, & \text{管外} \\ \mu_0 n I, & \text{管内} \end{cases}$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad I = \frac{Q}{t}$$

例 1：如图，有一无限长直导线，距离直导线 R 处有一 O 点。当通过的电流为 I 时，求 O 点处的磁感应强度的大小和方向。



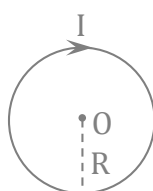
$$B_{\text{直线}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{垂直纸面向外}$$

例 2：如图，有一半径为 R 的圆形导线。当通过的电流为 I 时，求圆心 O 点处的磁感应强度的大小和方向。

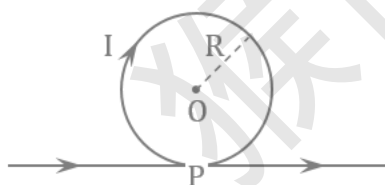
$$N=1 \quad r=0$$

$$B_{\text{圆形}} = \frac{N\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

垂直纸面向里



例 3：如图，无限长直导线在 P 点处弯成半径为 R 的圆。当通过的电流为 I 时，求圆心 O 点处的磁感应强度的大小和方向。

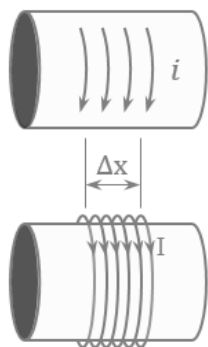


$$\text{圆形部分: } B_{\text{圆形}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \text{垂直纸面向里}$$

$$\text{直线部分: } B_{\text{直线}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \text{垂直纸面向外}$$

$$B = B_{\text{圆形}} + B_{\text{直线}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \quad \text{垂直纸面向里}$$

例 4：如图，一无限长直圆筒沿轴线单位长度上垂直流过的电流为*i*，求圆筒内部的磁感应强度的大小和方向。

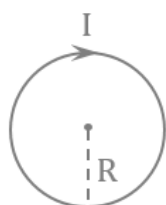


$$nI = i$$

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 i$$

水平向右

例 5：一点电荷 $q = 8 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，以 $v = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$ 的速度在半径为 $R = 6 \times 10^{-8} \text{ m}$ 的圆周上作匀速圆周运动，求该点电荷在轨道中心所产生的磁感应强度的大小。



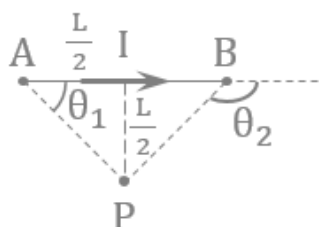
$$I = \frac{Q}{t} = \frac{q}{\frac{2\pi R}{v}} = \frac{qv}{2\pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 qv}{4\pi R^2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^5}{4\pi \times (6 \times 10^{-8})^2} = 6.67 \times 10^{-6} \text{ T}$$

二、求通电导线段/射线的磁感应强度

例 1：长度为 L 的通电导线段以图示的方式通以电流 I ，求导线段在图示

P 点处产生的磁感应强度。



①起点为点 A，终点为点 B；距离为 $\frac{L}{2}$

② $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

③ $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$

④ $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot \frac{L}{2}} \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} \right)$$

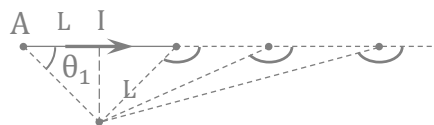
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot \frac{L}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi L}$$

方向为垂直纸面向里

例 2：长度无限长的通电射线以图示的方式通以电流 I ，求该射线在图示

P 点处产生的磁感应强度。



①起点为点 A，终点为无穷远处；距离为 L

② $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

③ $\theta_2 = \pi$

④ $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\pi \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) \right]$$

$$= \frac{(2+\sqrt{2})\mu_0 I}{8\pi L}$$

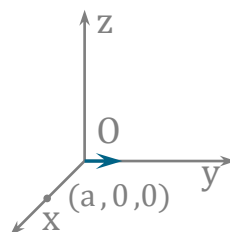
方向为垂直纸面向里

三、求长为 dl 的通电短导线的磁感应强度

例 1：如图，一长直载流导线沿空间直角坐标 Oy 轴放置，电流沿 y 轴

正方向。在原点 O 处取一电流元 $I d\vec{l}$ ，则该电流元在点 $(a, 0, 0)$ 处的

磁感应强度的大小是多少？



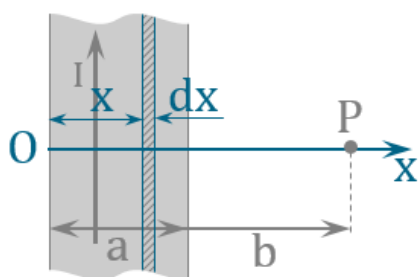
$$B = \frac{\mu_0 Idl \sin\theta}{4\pi r^2} \quad r=a \quad \theta=90^\circ$$

$$= \frac{\mu_0 Idl \sin 90^\circ}{4\pi a^2}$$

$$= \frac{\mu_0 Idl}{4\pi a^2}$$

四、利用积分求磁感应强度

例 1：如图，一无限长通电薄铜片厚度不计，宽度为 a ，电流 I 在铜片上均匀分布。与铜片共面的 P 点到铜片右边缘距离为 b ，请求 P 点的磁感应强度。



$$dI = \frac{I}{a} dx$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\begin{aligned} \therefore dB &= \frac{\mu_0 dI}{2\pi(a+b-x)} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a(a+b-x)} dx \end{aligned}$$

垂直纸面向里

$$\begin{aligned} B &= \int_0^a dB \\ &= \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi a(a+b-x)} dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_0^a \frac{1}{a+b-x} dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b} \end{aligned}$$


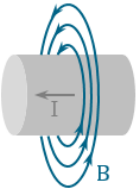
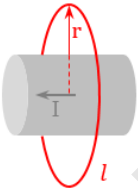

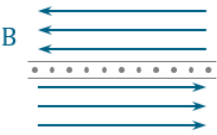
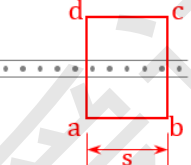

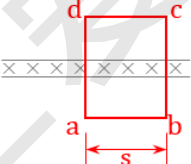
垂直纸面向里

$$\begin{aligned} \text{积分步骤: } \int_0^a \frac{1}{a+b-x} dx &= -\ln(a+b-x) \Big|_0^a \\ &= -\ln b - [-\ln(a+b)] \end{aligned}$$

$$= \ln(a+b) - \ln b$$

$$= \ln \frac{a+b}{b}$$

五、利用安培环路定理求磁感应强度

电流 I 的类型	产生的 B 的情况	闭合曲线 l 的画法
一条直线 		
一排直线 		
		

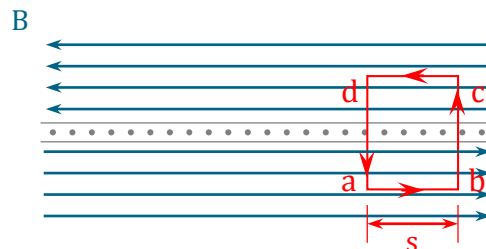
例 1：如图，一无限大薄金属板垂直于纸面放置，其上通有垂直纸面向外的电流，面电流密度 (即垂直于电流方向的单位长度里通过的电流) 到处均匀，大小为 j 。求该元件的磁场分布。

$$\oint_L B dl$$

$$= B \cdot (l \text{ 与 } B \text{ 平行且同向部分} - l \text{ 与 } B \text{ 平行且反向部分})$$

$$= B \cdot (2s - 0)$$

$$= 2Bs$$



$$\Sigma I_{\text{内}} = js$$

$$\oint_L B dl = \mu_0 \Sigma I_{\text{内}}$$

$$\Rightarrow 2Bs = \mu_0 js$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

该元件两侧磁场大小都为 $\frac{\mu_0 j}{2}$ ，方向如图所示

例 2：如图，一个无限长厚壁导体圆筒内径为 R_1 ，外径为 R_2 ，圆筒上通有电流 I ，且电流均匀分布，求该圆筒的磁感应强度分布。

解：①圆筒外部

$$\oint_L B dl = B \cdot 2\pi r$$

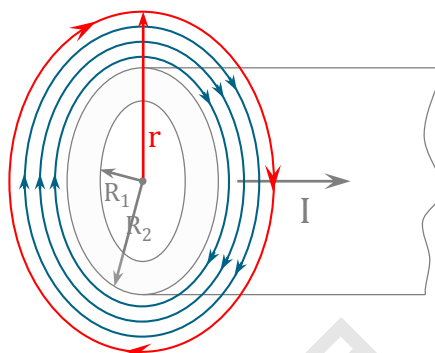
$$\Sigma I_{\text{内}} = I$$

$$\oint_L B dl = \mu_0 \Sigma I_{\text{内}}$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

B 的方向如图所示



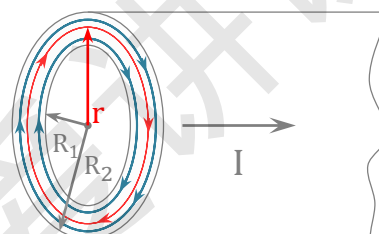
②圆筒内部

$$\oint_L B dl = 0$$

$$\Sigma I_{\text{内}} = 0$$

$$\oint_L B dl = \mu_0 \Sigma I_{\text{内}}$$

$$\Rightarrow B = 0$$



③圆筒内外径之间

$$\oint_L B dl = B \cdot 2\pi r$$

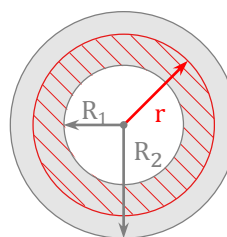
$$\Sigma I_{\text{内}} = \frac{\pi r^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} I$$

$$\oint_L B dl = \mu_0 \Sigma I_{\text{内}}$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \frac{\pi r^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I (\pi r^2 - \pi R_1^2)}{2\pi r (\pi R_2^2 - \pi R_1^2)}$$

B 的方向如图所示



大物—电磁学第九课

一、判断有速度的电荷在磁场中受的力（洛伦兹力）

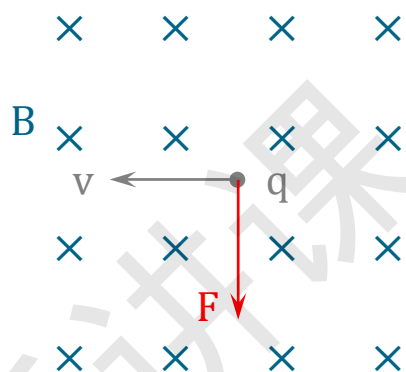
例 1：如图，均匀磁场 B 方向为从前到后，正点电荷 q 速度大小为 v ，运动方向为从右到左，试求此时，点电荷所受洛伦兹力的大小与方向。

$$F = qvB\sin 90^\circ$$

$$= qvB\sin 0^\circ$$

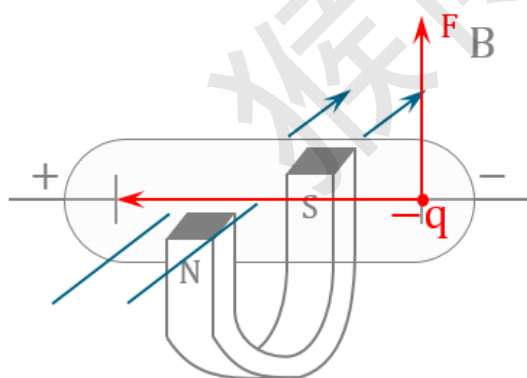
$$= qvB$$

竖直向下



例 2：如图，阴极射线管外放置一个蹄型磁铁后，阴极射线将B。

- (A) 向下偏 (B) 向上偏
(C) 向前偏 (D) 向后偏



二、带电粒子在磁场作用下运动

例 1：云室装置可以显示粒子的运动轨迹。现云室中有均匀磁场 $B=1\text{T}$ ，观测到一个质子的运动轨迹是半径 $r=0.2\text{m}$ 的圆弧。已知质子的电荷为 $q=1.6\times 10^{-19}\text{C}$ ，静止质量 $m=1.67\times 10^{-27}\text{kg}$ ，求该质子的动能。

$$r = \frac{mv_0}{qB} = 0.2$$

$$\frac{1.67\times 10^{-27}\cdot v_0}{1.6\times 10^{-19}\times 1} = 0.2$$

$$v_0 = 1.9\times 10^7\text{m/s}$$

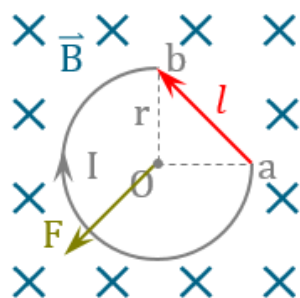
$$\text{动能} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 1.67\times 10^{-27}\times (1.9\times 10^7)^2$$

$$= 3.066\times 10^{-13}\text{J}$$

三、通电导线在磁场中受的力(安培力)

例 1：如图，一半径为 r 的 $\frac{3}{4}$ 圆弧形导线中通以恒定电流 I ，导线置于均匀磁场 \vec{B} 中，且 \vec{B} 与导线所在的平面垂直，求该载流导线 ab 所受的安培力。



$$l = \sqrt{2}r \quad \theta = 90^\circ$$

$$F = IlB \sin \theta = \sqrt{2} I r B$$

方向如图所示

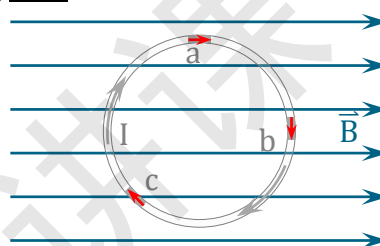
例 2：如图，在均匀磁场 \vec{B} 中有一圆形载流导线，a、b、c 是其上三个长度相等的电流元，则它们所受安培力的大小关系为 C。

(A) $F_a > F_b > F_c$

(B) $F_c > F_b > F_a$

(C) $F_b > F_c > F_a$

(D) $F_a > F_c > F_b$



a 段夹角 θ_a 为 0° ；b 段夹角 θ_b 为 90° ；c 段夹角 θ_c 为一钝角

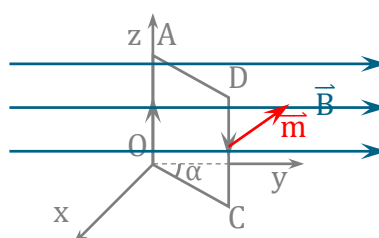
$$\sin 0^\circ = 0 \quad ; \quad \sin 90^\circ = 1 \quad ; \quad 0 < \sin \text{钝角} < 1$$

四、载流线圈的磁矩 \vec{m} 、受到的力矩 \vec{M}

例 1：如图，矩形线圈 AOCD 通以电流 I，线圈平面与 y 轴的夹角为 $\alpha < 90^\circ$ ，AO 边在 z 轴上。线圈置于均匀磁场 \vec{B} 中， \vec{B} 的方向为 y 轴正方向。若线圈可绕 z 轴自由转动，则线圈将 B。

(A) 朝着使 α 减小的方向转动

(B) 朝着使 α 增大的方向转动



(C) 不发生转动

(D) 运动情况无法判断

例 2：如图所示，一线圈半径为 R ，线圈内通过电流为 I ，置于方向与 y 轴一致，大小为 B 的匀强磁场中，若线圈可绕着 z 轴转动，试求该线圈的磁矩及在磁场中所受力矩的大小及方向。

解： $m = NIS = I\pi R^2$

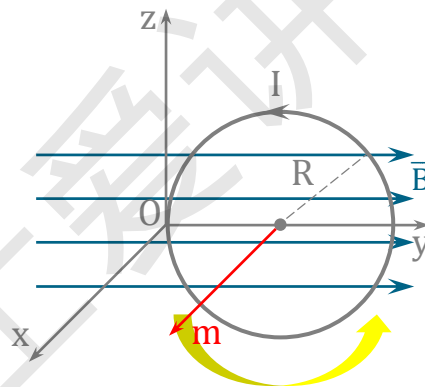
朝外

$$M = mB\sin\theta$$

$$= I\pi R^2 B \cdot \sin 90^\circ$$

$$= I\pi R^2 B$$

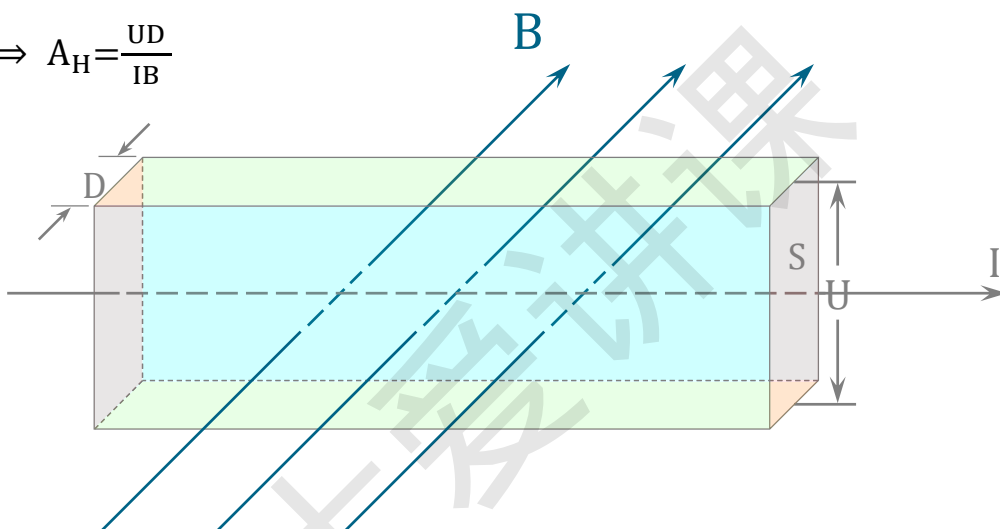
方向如图所示



五、霍尔效应

例 1：如图，一个导体板通有电流 I ，厚度为 D ，横截面面积为 S ，放置在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向垂直于板的侧面。现测得导体上下两面电势差为 U ，则此板的霍尔系数为？

$$U = A_H \frac{IB}{d} \Rightarrow A_H = \frac{UD}{IB}$$



大物—电磁学第十课

一、判断三种磁介质

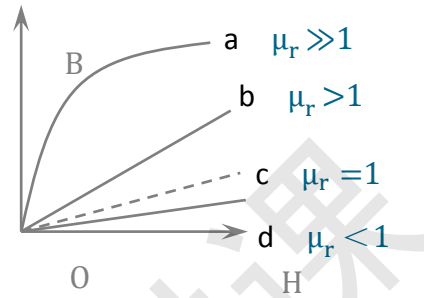
例 1：图示为三种不同的磁介质的 $B \sim H$ 关系曲线，其中虚线表示的是

$$B = \mu_0 H.$$

a 曲线表示的是 铁磁质，

b 曲线表示的是 顺磁质，

c 曲线表示的是 抗磁质。



二、管内有磁介质，求螺线管内的磁感应强度、磁场强度

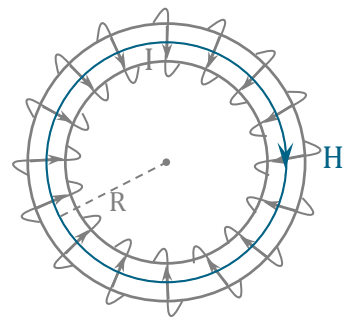
例 1：如图所示，螺线管中心线半径为 R ，环上密绕线圈 N 匝，线圈中电流为 I 。管内充满相对磁导率 μ_r 的磁介质。求管内磁场强度和磁感应强度。

$$H = nI = \frac{N}{2\pi R} I$$

方向如图所示

$$B = \mu_0 \mu_r nI = \mu_0 \mu_r \frac{N}{2\pi R} I$$

方向与 H 一致



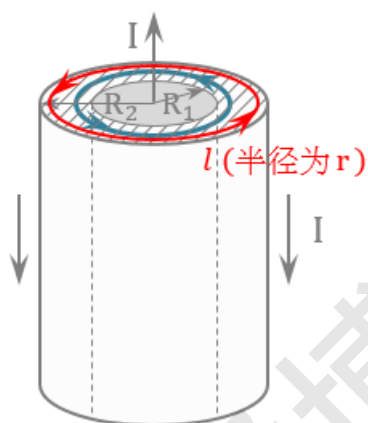
磁介质的其他两个属性：

$$\text{磁导率} : \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\text{磁化率} : \chi = \mu_r - 1$$

三、用磁介质中的安培环路定理求磁场强度与磁感应强度

例 1: 如图, 一根长直电缆由半径为 R_1 的实心导体芯、半径为 $R_2 > R_1$ 的外壁及导体芯与外壁间的均匀磁介质 μ_r 构成。现电流 I 均匀地流过导体芯, 并均匀地沿外壁流回。求磁介质中的磁场强度分布及磁感应强度分布及电缆外的磁场强度分布。



磁介质中:

$$\oint_L H dl = H \cdot 2\pi r$$

$$\Sigma I_{\text{内}} = I$$

$$\oint_L H dl = \Sigma I_{\text{内}}$$

$$H \cdot 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{方向如图所示}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \quad \text{方向与 } H \text{ 一致}$$

电缆外:

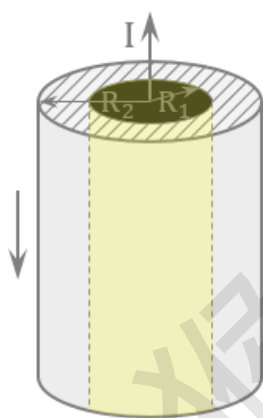
$$\oint_L H dl = H \cdot (l_{\text{与 } H \text{ 平行且同向部分}} - l_{\text{与 } H \text{ 平行且反向部分}})$$

$$\Sigma I_{\text{内}} = 0$$

$$\oint_L H dl = \Sigma I_{\text{内}} = 0$$

四、求束缚电流/磁化电流

例 1：如图，一根长直电缆由半径为 R_1 的实心导体芯、半径为 $R_2 > R_1$ 的外壁及导体芯与外壁间的均匀磁介质 μ_r 构成。现电流 I 均匀地流过导体芯，并均匀地沿外壁流回。求紧贴导体芯的磁介质内表面上的束缚电流。



$$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$B_{\text{内表面}} = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi R_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} j' = M \cos \theta \\ M = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} B_{\text{内表面}} \\ \theta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow j' = \frac{\mu_r - 1}{2\pi R_1} I$$

$$I' = j' \cdot j' \text{ 的宽度} = j' \cdot 2\pi R_1 = (\mu_r - 1) I$$

大物—电磁学第十一课

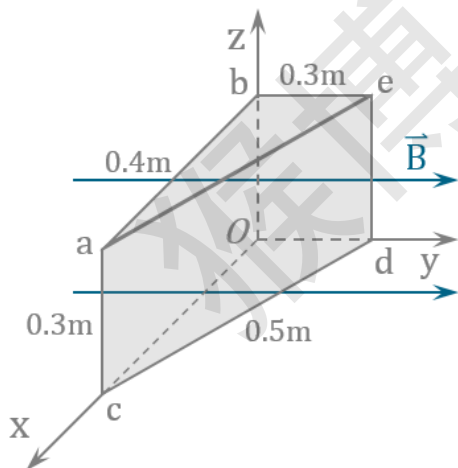
一、求通过某个面的磁通量

情 况	磁通量 Φ
平面法线方向与 B 方向夹角为 θ	$\Phi = \pm B \cdot S \cos\theta = \pm B \cdot S_{\perp}$
封闭曲面	$\Phi = 0$

(若面为封闭面，则 B 穿出为正，反之为负)

例 1：如图，一均匀磁场的磁感应强度 $B=2T$ ，方向沿 y 轴正方向。

- 求：(1) 通过图中 aboc 面的磁通量；
(2) 通过图中 bedo 面的磁通量；
(3) 通过图中 acde 面的磁通量。



(1) aboc 面：

$$\Phi_{aboc} = \pm B \cdot S \cos\theta = \pm B \cdot S_{\perp}$$

$$S_{\perp} = S_{aboc} = 0.3m \times 0.4m = 0.12 \text{ m}^2$$

$$\Phi_{aboc} = -B \cdot S_{\perp} = -2 \times 0.12 = -0.24 \text{ Wb}$$

(2) bedo 面:

$$\Phi_{bedo} = \pm B \cdot S \cos \theta = \pm B \cdot S_{\perp}$$

$$S_{\perp} = 0$$

$$\Phi_{bedo} = \pm B \cdot S_{\perp} = 0$$

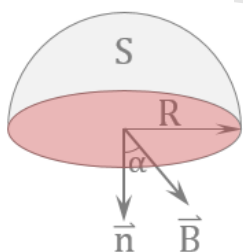
(3) acde 面:

$$\Phi_{acde} = \pm B \cdot S \cos \theta = \pm B \cdot S_{\perp}$$

$$S_{\perp} = S_{aboc} = 0.3 \text{ m} \times 0.4 \text{ m} = 0.12 \text{ m}^2$$

$$\Phi_{bedc} = B \cdot S_{\perp} = 2 \times 0.12 = 0.24 \text{ Wb}$$

例 2: 如图, 一均匀磁场的磁感应强度大小为 B 。半球面 S 的半径为 R , S 边线所在平面的法线 \vec{n} 与 \vec{B} 的夹角为 α 。取弯曲向外为正, 求通过半球面 S 的磁通量。



$$\Phi_{\text{封闭曲面}} = \Phi_S + \Phi_{\text{圆}} = 0$$

$$\therefore \Phi_S = -\Phi_{\text{圆}}$$

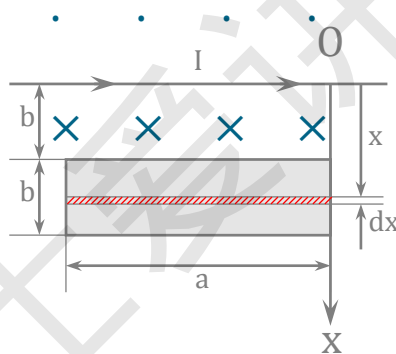
$$\Phi_{\text{圆}} = \pm B \cdot S \cos \theta = \pm B \cdot S_{\perp}$$

$$\Phi_{\text{圆}} = B\pi R^2 \cos\alpha$$

$$\therefore \Phi_S = -\Phi_{\text{圆}} = -B\pi R^2 \cos\alpha$$

二、利用积分求通过某个面的磁通量

例 1：如图，无限长直导线通有电流 I ，在它旁边有一个长为 a 、高为 b 的矩形线框与其共面。线框的长边与直导线平行，二者距离为 b 。求通过线框的总磁通量。



解： $dS = a dx$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\Phi = \int_b^{2b} B \cdot dS$$

$$= \int_b^{2b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \int_b^{2b} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln x \Big|_b^{2b}$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \cdot (\ln 2b - \ln b)$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln \frac{2b}{b}$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$

三、由磁通量变化产生的感应电动势

例 1: 如图, 无限长直导线通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$, 在它旁边有一个长为 a 、高为 b 的矩形线框与其共面。线框的长边与直导线平行, 二者距离为 b 。求线框内感应电动势大小。

$$dS = a dx$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\Phi = \int_b^{2b} B \cdot dS$$

$$= \int_b^{2b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \int_b^{2b} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln x \Big|_b^{2b}$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \cdot (\ln 2b - \ln b)$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln \frac{2b}{b}$$

$$= \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$

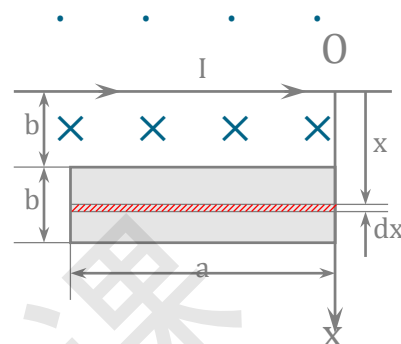
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$= - \frac{d\left(\frac{a\mu_0 I}{2\pi} \ln 2\right)}{dt}$$

$$= - \frac{d\left(\frac{a\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi} \ln 2\right)}{dt}$$

$$= - \frac{a\mu_0 I_0}{2\pi} \ln 2 \cdot \frac{d(\sin \omega t)}{dt}$$

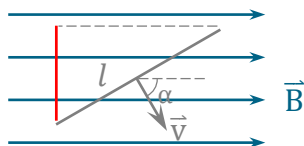
$$= - \frac{a\mu_0 I_0}{2\pi} \ln 2 \cdot \omega \cos \omega t$$



四、 由切割磁感线产生的感应电动势

例 1: 如图, 长为 l 的直导线在均匀磁场 \vec{B} 中以速度 \vec{v} 移动, 磁感应强度与速度的夹角为 α , 则导线中的电动势为 A。

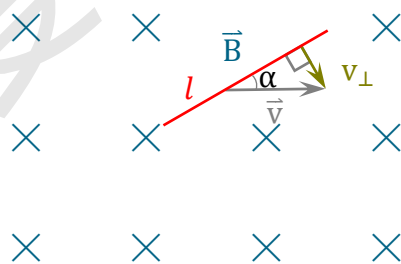
- (A) 0 (B) $Blv\sin\alpha$
 (C) Blv (D) $Blv\cos\alpha$



$v_{\perp}=0$ $\mathcal{E}=Blv_{\perp}=0$

例 2: 如图, 长为 l 的直导线在均匀磁场 \vec{B} 中以速度 \vec{v} 移动, 导线与速度的夹角为 α , 则导线中的电动势为 B。

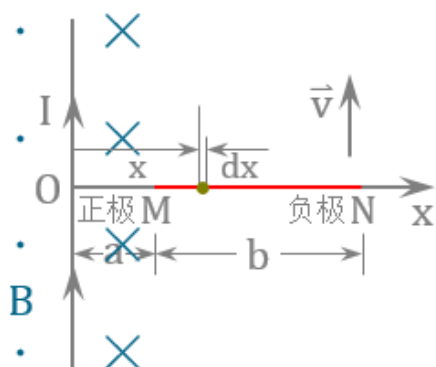
- (A) 0 (B) $Blv\sin\alpha$
 (C) Blv (D) $Blv\cos\alpha$



$v_{\perp}=v\sin\alpha$ $\mathcal{E}=Blv_{\perp}=Blv\sin\alpha$

五、利用积分算切割产生的感应电动势

例 1：如图，无限长载流直导线 I 附近，有一长度为 b 的导线段与其垂直，导线段左端点 M 与长直导线距离为 a 。导线段以速度 \vec{v} 平行于直导线移动，求导线段感应电动势的大小及方向。



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathcal{E} = \int_a^{a+b} B v dx$$

$$= \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v dx$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{1}{x} dx$$

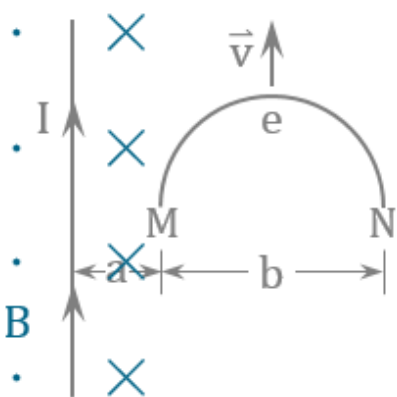
$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \cdot \ln x \Big|_a^{a+b}$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \cdot [\ln(a+b) - \ln a]$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

方向为 x 轴负方向

例 2：如图，无限长载流直导线 I 附近，有一直径为 b 的半圆环导线 MeN 与其共面，且端点 MN 的连线与其垂直。左端 M 点与导线距离为 a ，半圆环以速度 \vec{v} 平行于直导线移动，求半圆环内的感应电动势



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathcal{E} = \int_a^{a+b} B v dx$$

$$= \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v dx$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \cdot \ln x \Big|_a^{a+b}$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \cdot [\ln(a+b) - \ln a]$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

方向为 x 轴负方向

六、螺线管中的磁能

例 1：真空中有两只长直螺线管 1 和 2，二者长度相等，匝数相同，直径之比

$\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{4}$ 。当它们通以相同电流时，两螺线管储存的磁能之比 $\frac{W_1}{W_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$W_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r1} n_1^2 V_1 I_1^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r2} n_2^2 V_2 I_2^2$$

长度相等+匝数相同 $\Rightarrow n_1 = n_2$

$$\text{长度相等+直径之比 } \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{L \cdot \pi (\frac{d_1}{2})^2}{L \cdot \pi (\frac{d_2}{2})^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1}{16}$$

通以相同电流 $\Rightarrow I_1 = I_2$

没提管内磁介质 $\Rightarrow \mu_{r1} = \mu_{r2}$

$$\therefore \frac{W_1}{W_2} = \frac{\frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r1} n_1^2 V_1 I_1^2}{\frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r2} n_2^2 V_2 I_2^2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{16}$$

七、求磁场能量密度

例 1：一个中空的螺线管上每厘米绕有 20 匝导线，当通以电流 $I=3A$ 时，

求管内的磁场能量密度。

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$$

$$\text{其中, } B = \mu_0 n I = \mu_0 \cdot \frac{20}{0.01} \cdot 3 = 6000 \mu_0$$

没有特别指明磁介质，默认 $\mu_r = 1$

$$\therefore w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(6000 \mu_0)^2}{2\mu_0} = 22.6 \text{ J/m}^3$$