

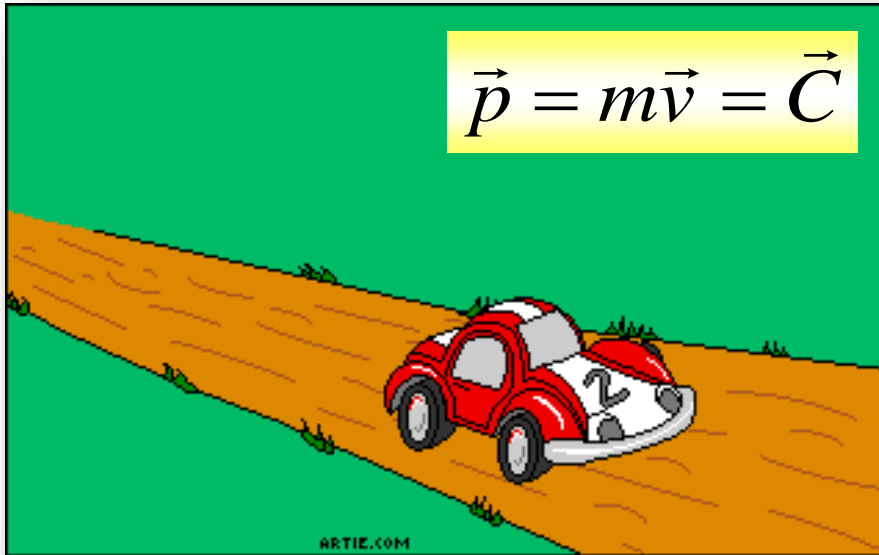
## § 3. 2

# ANGULAR MOMENTUM

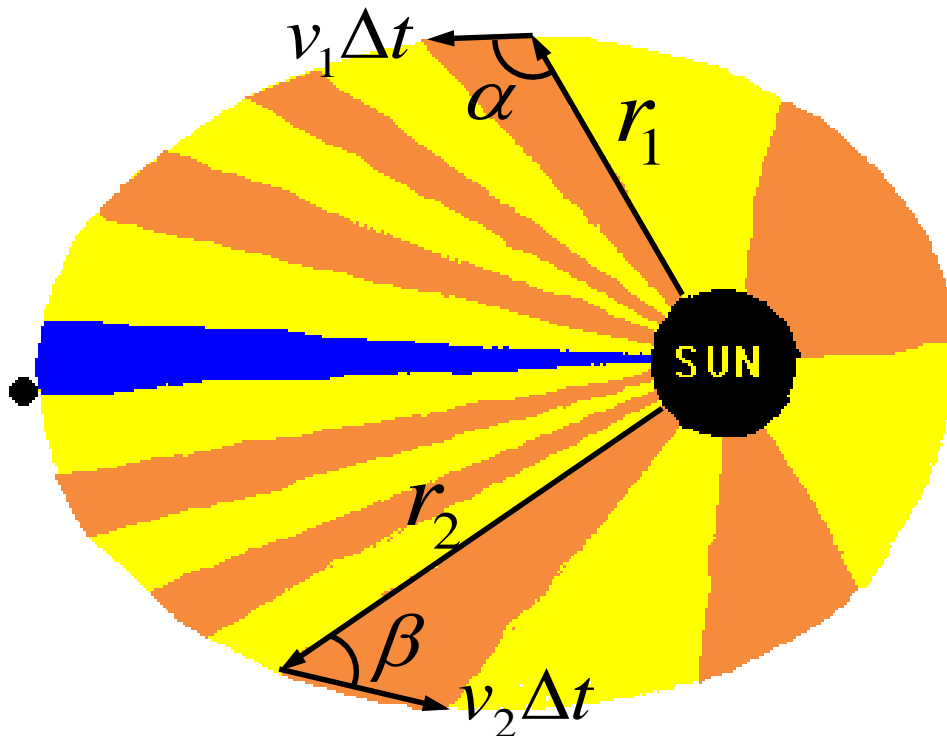
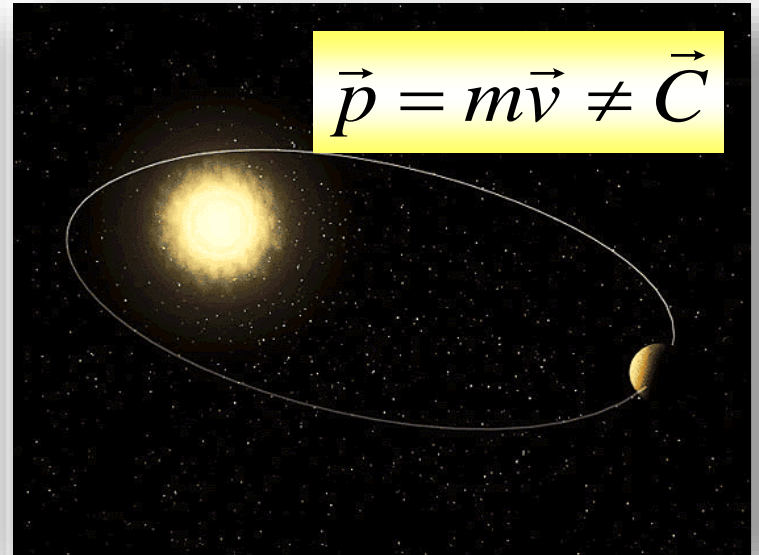
A diagram of the Earth is positioned between the words 'ANGULAR' and 'MOMENTUM'. A vector labeled 'L' points from the center of the Earth towards the top-left, representing angular momentum. Another vector labeled 'v' points from the surface of the Earth towards the top-right, representing velocity. A curved arrow around the Earth indicates its rotation.

质点的角动量定理  
和角动量守恒定律

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{C}$$



$$\vec{p} = m\vec{v} \neq \vec{C}$$



在较短时间 $\Delta t$ 内:

$$S_1 = r_1 v_1 \Delta t \sin \alpha / 2$$

$$S_2 = r_2 v_2 \Delta t \sin \beta / 2$$

$$S_1 = S_2$$

$$r_1 v_1 \sin \alpha = r_2 v_2 \sin \beta$$

# 1. 质点的角动量

定义：质点相对于固定点 $O$ 的角动量等于相对于 $O$ 点的位置矢量与质点动量的矢积。

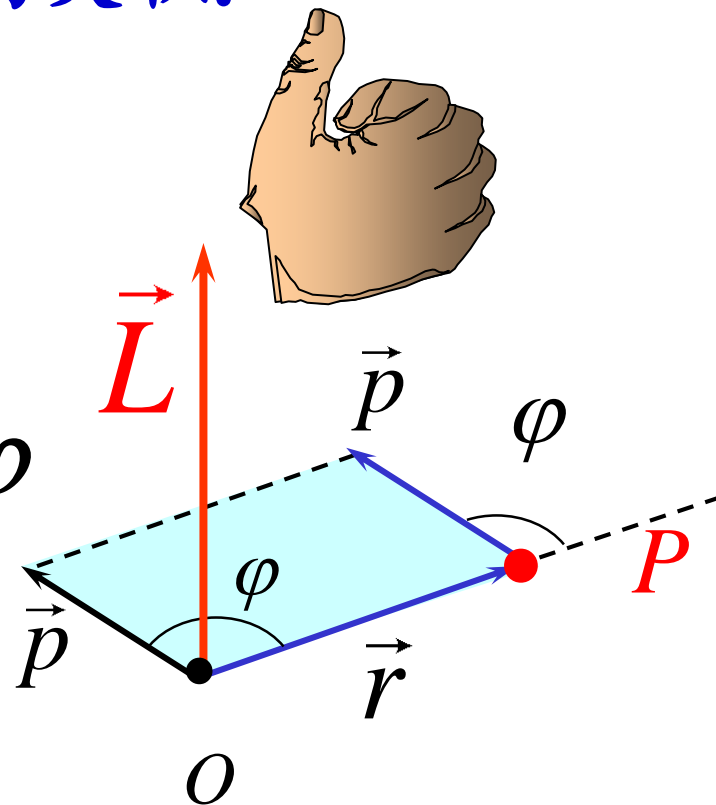
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

大小：

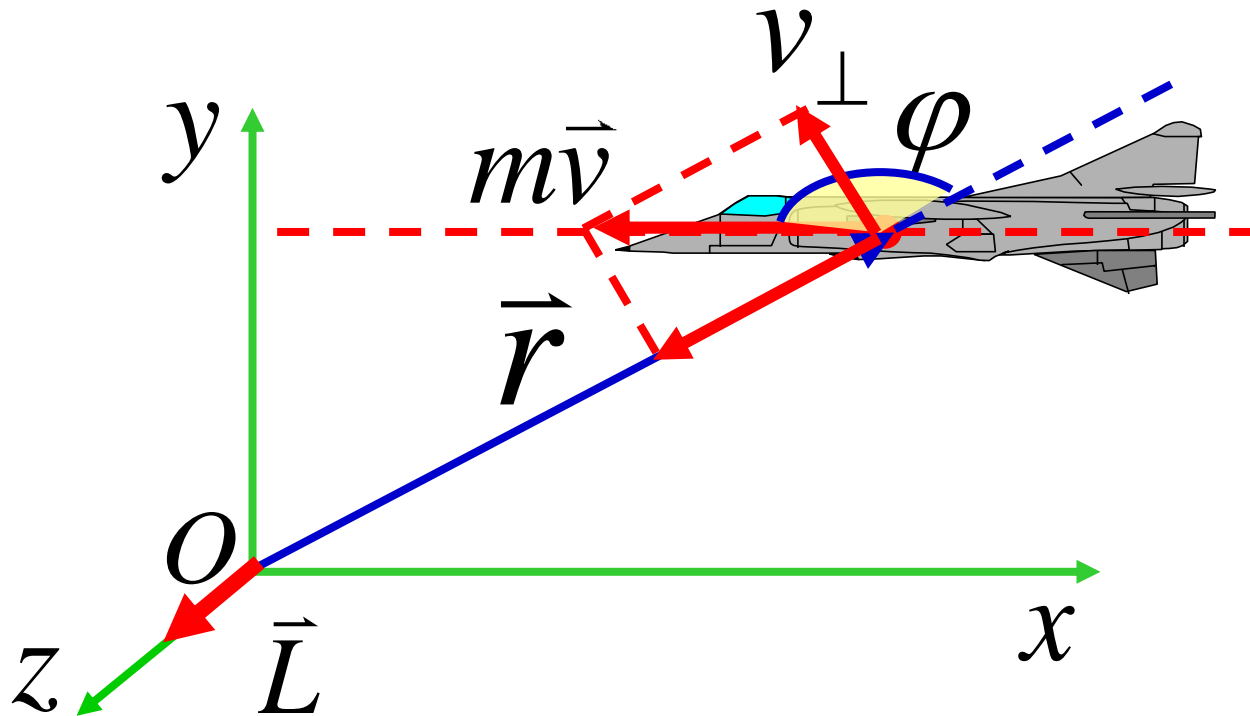
$$L = rp \sin \varphi = rmv \sin \varphi$$

方向：矢积方向

单位： $\text{Kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $\text{J s}$



例：计算飞机相对于O点的角动量



$$L = rmv \sin \varphi = rmv_{\perp}$$

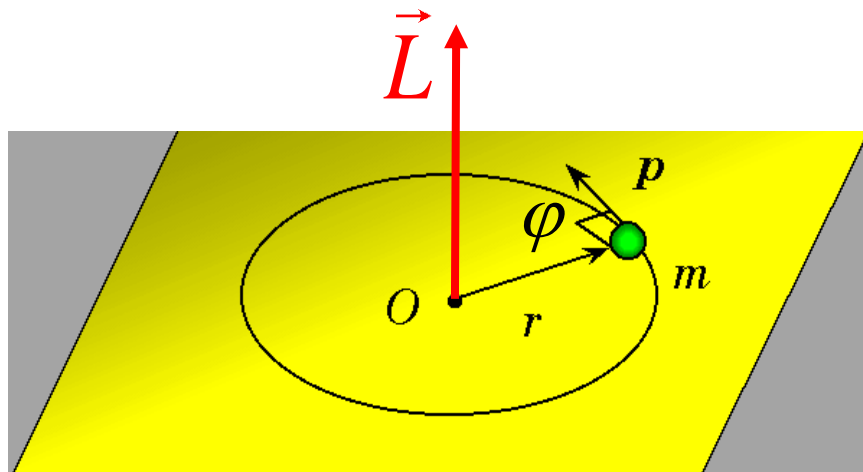
只有存在垂直于矢径方向的速度分量，角动量才不等于零。

## 例：圆周运动质点相对于圆心的角动量

大小：  $L = rmv$

方向：

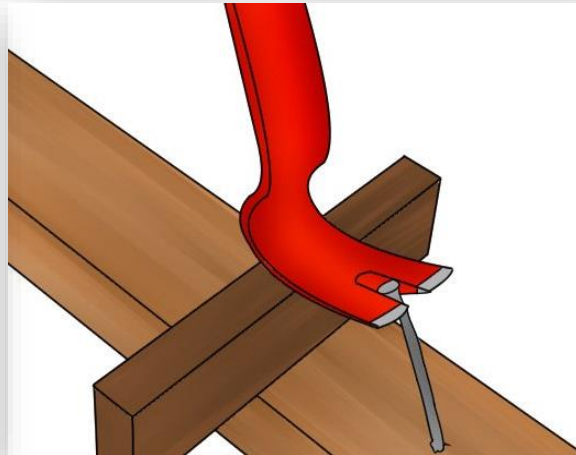
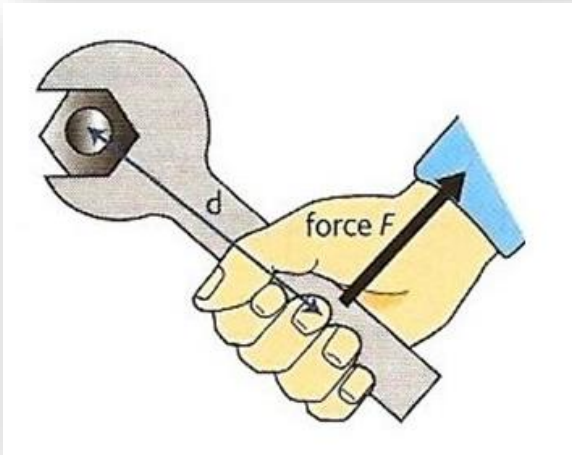
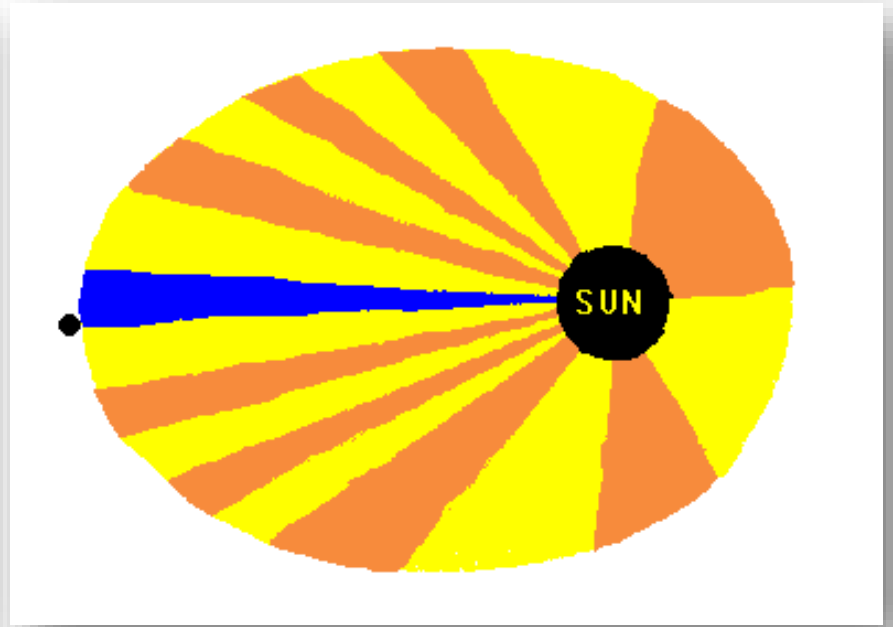
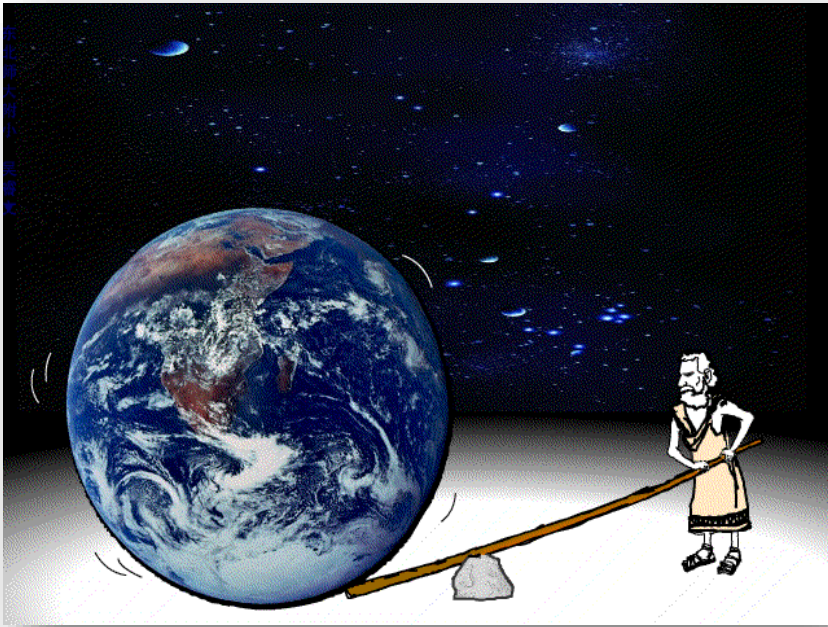
垂直于圆周所在平面，  
满足右手定则



**Note**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

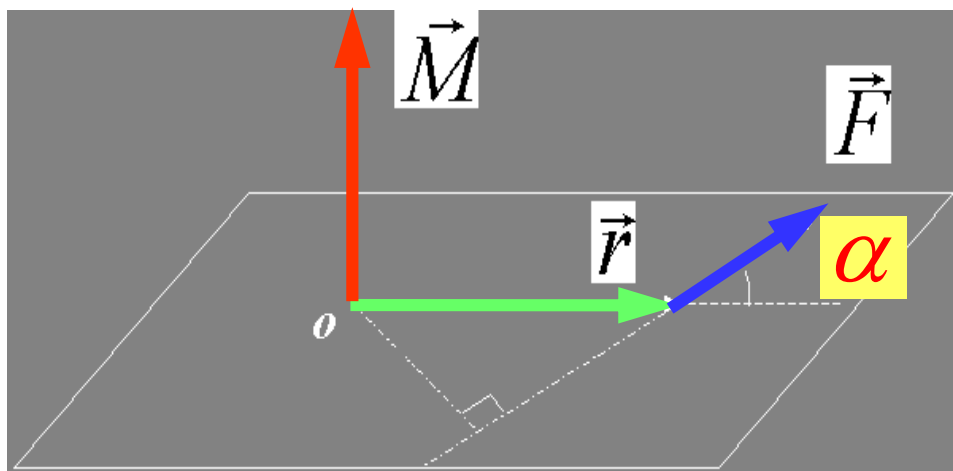
- 为表示是对哪个参考点的角动量，通常将角动量  $\vec{L}$  画在参考点上。
- 角动量的定义并没有限定质点只能作曲线运动或不能作直线运动。



## 2. 力矩

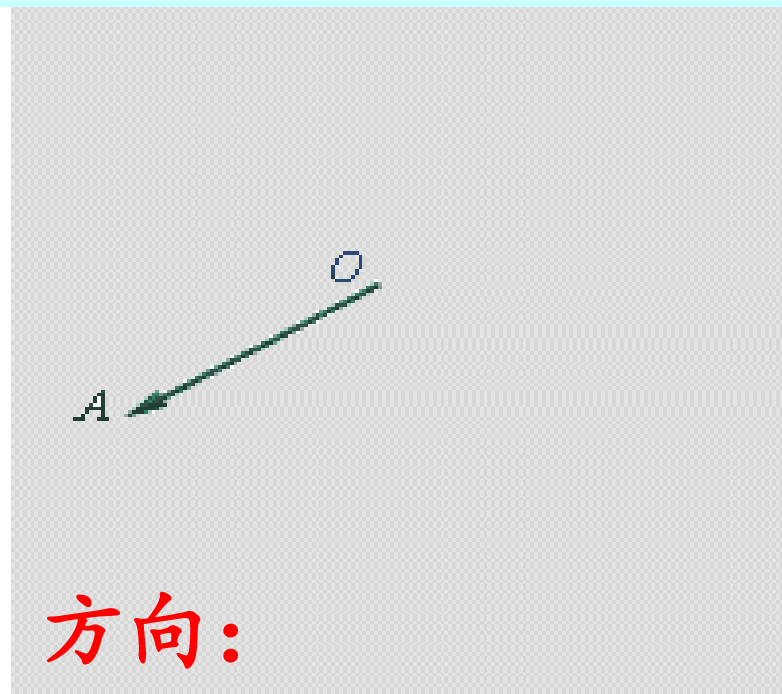
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

定义：力对某点 $O$ 的力矩等于力的作用点相对于 $O$ 点的矢径与力的矢积。



大小： $M = rF \sin \alpha$

单位： $\text{N} \cdot \text{m}$



方向：

垂直于  $\vec{r}$  和  $\vec{F}$  构成的平面，遵守右手定则。

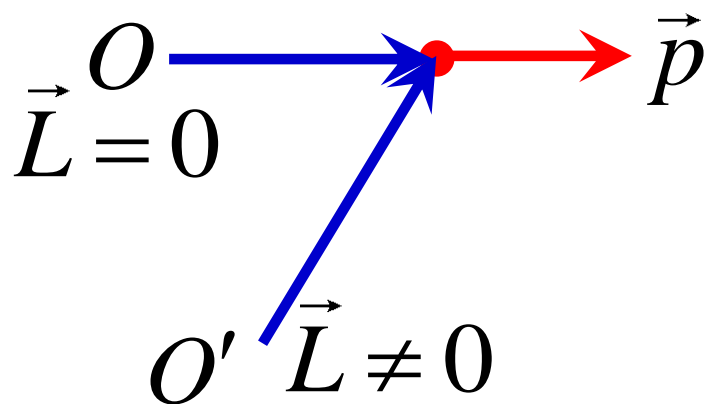
## Note

➤ 角动量和力矩均与参考点的选择有关.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

若  $\vec{p} \neq 0$

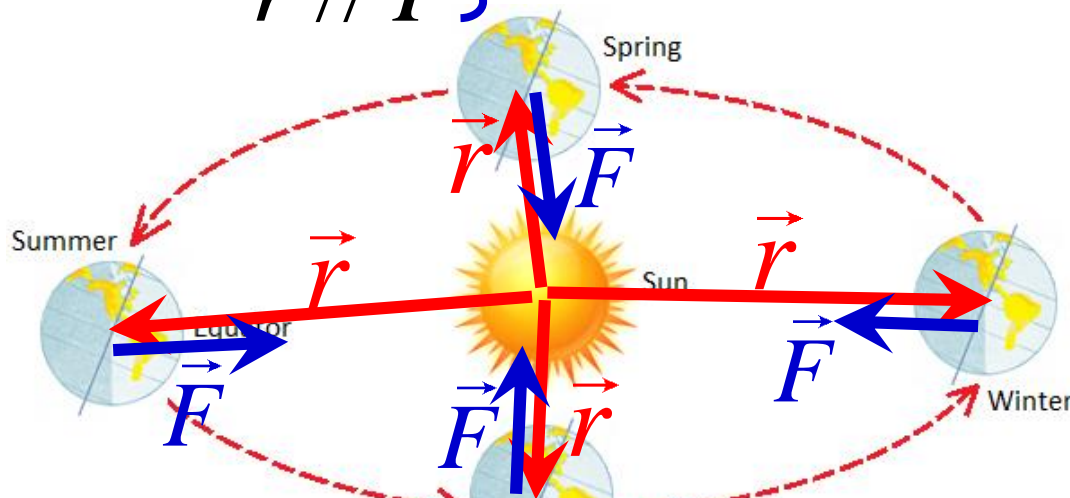
$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = 0 \\ \vec{r} // \vec{p} \end{array} \right\} \vec{L} = 0$$



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

若  $\vec{F} \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = 0 \\ \vec{r} // \vec{F} \end{array} \right\} \vec{M} = 0$$



有心力的力矩为零



**Note**

► 角动量和力矩的分量形式：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k} \\ &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times \\ &\quad (p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{M} &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \\ &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times \\ &\quad (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k})\end{aligned}$$

$L_z$  对z轴的角动量

$M_z$  对z轴的力矩

### 3. 质点的角动量定理

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$$

**质点的角动量定理：**作用在质点上的力矩等于角动量的变化率。

## 4. 质点系的角动量定理

内力:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

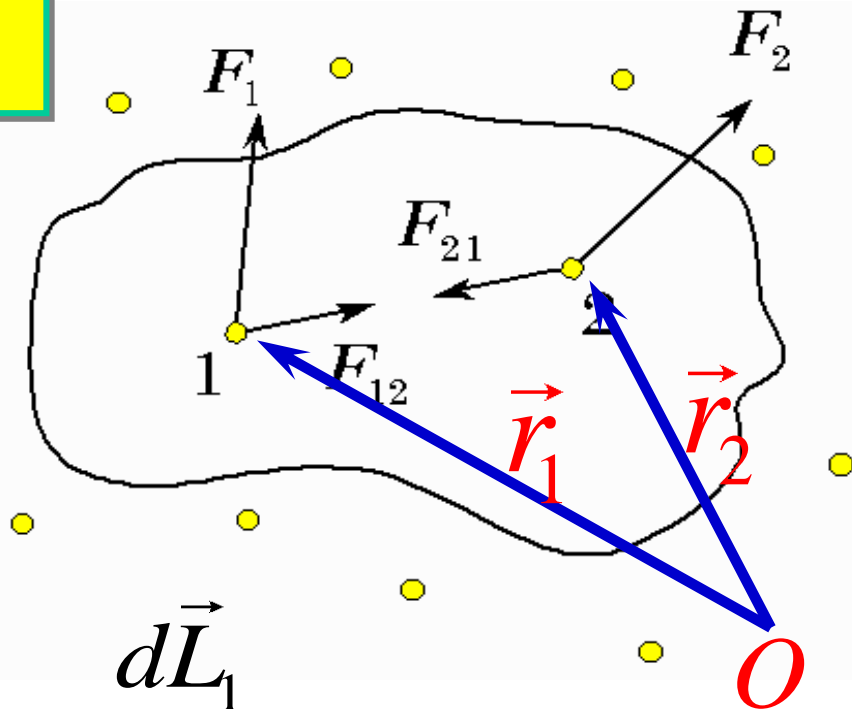
外力:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

根据质点的角动量定理:

质点1: 
$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$$

质点2: 
$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$



## 4. 质点系的角动量定理

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \frac{d}{dt} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)$$

合外力的力矩

内力矩=0

合外力矩

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{d}{dt} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)$$

总角动量

$$\vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

➤ 质点系的角动量定理：系统的总角动量对时间的变化率等于系统所受合外力的力矩。

## 5. 角动量定理的积分形式

力矩的冲量  
(角冲量)

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{ext} dt = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

质点系的角动量定理(积分形式): 质点系总角动量的变化等于系统所受合外力矩的冲量.

分量形式:

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} M_x dt = \int_{L_{x1}}^{L_{x2}} dL_x = L_{x2} - L_{x1} \\ \int_{t_1}^{t_2} M_y dt = \int_{L_{y1}}^{L_{y2}} dL_y = L_{y2} - L_{y1} \\ \int_{t_1}^{t_2} M_z dt = \int_{L_{z1}}^{L_{z2}} dL_z = L_{z2} - L_{z1} \end{cases}$$

§ 3.3

角动量守恒定律

Conservation of  
Angular Momentum

# 角动量守恒定律

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

如果

$$\vec{M} = 0$$

$$\vec{L} = \vec{C}$$

**角动量守恒定律：**如果作用在系统上的合外力矩为零，系统的总角动量守恒。

➤ 角动量守恒定律是宇宙中普遍成立的定律，在**宏观和微观领域**都成立。

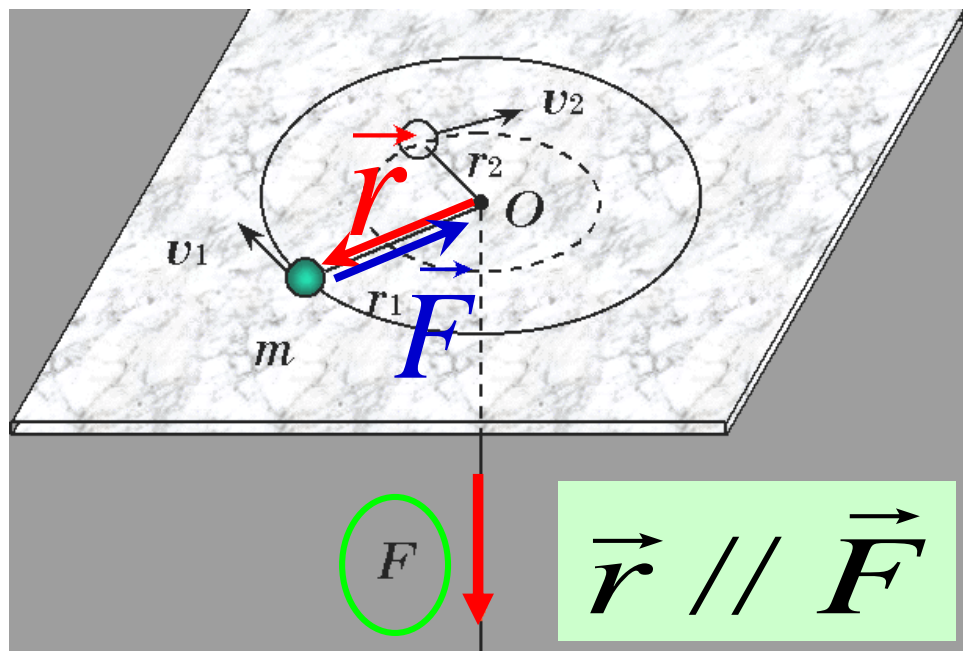
➤ 守恒定律表明尽管自然界千变万化，变换无穷，但决非杂乱无章，而是严格地受着某种规律的制约，变中有不变，因此守恒定律反映着自然界的和谐统一。

## 实例：圆周运动

$$\sum \vec{M} = 0$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{C}$$

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

质点的速率随半径  
变小而变大



**Note**

动量定理和角动量定理的比较：

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$$

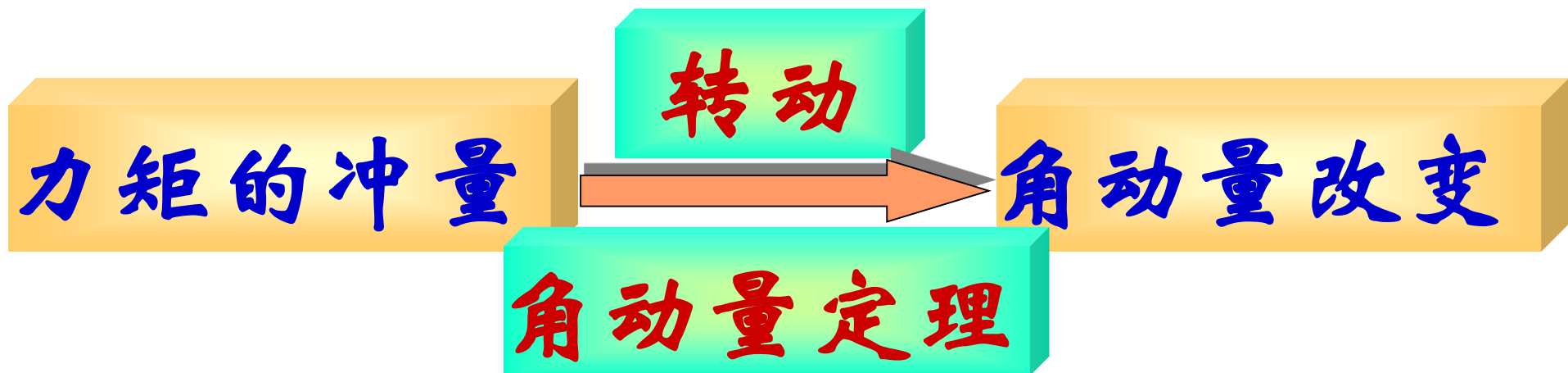
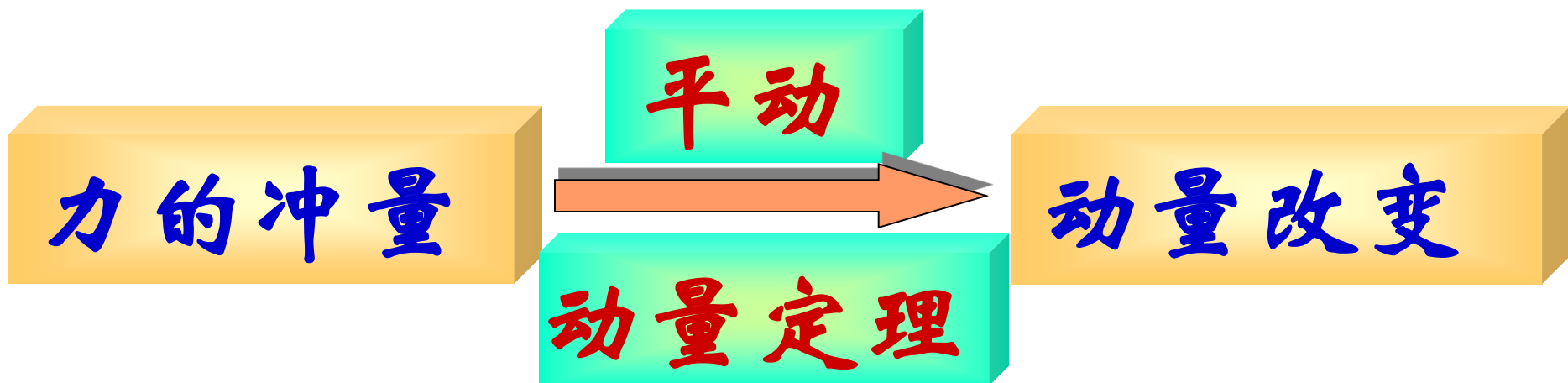
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \Delta \vec{L}$$

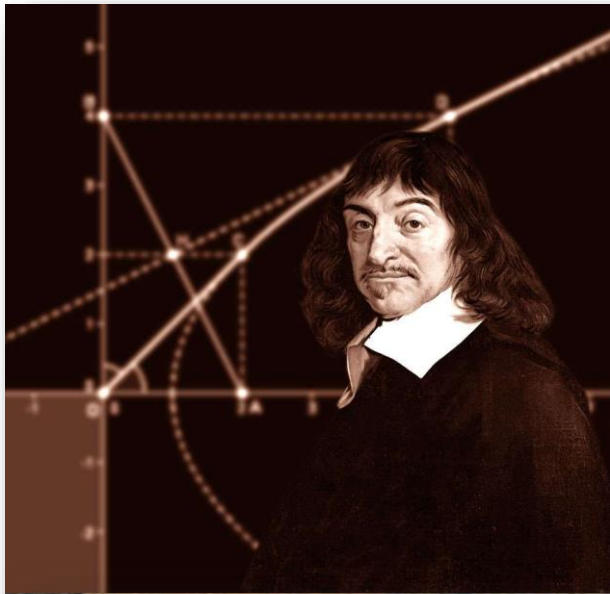
$$\vec{F} = 0, \quad \vec{p} = \vec{c}$$

$$\vec{M} = 0, \quad \vec{L} = \vec{C}$$

形式上完全相同，从动量定理变换到角动量定理，只需变换相应的物理量。

# 力在时间上的积累效果





Ren é Descartes

“运动之量”

$mv$

“宇宙间运动之量总和不变”



Gottfried Wilhelm Leibniz

“活力”

$mv^2$

“活力可以某种形式存储”